

流体力学笔记——Lecture 9

量纲分析与相似性

Chapter 7: Dimensional Analysis and Similitude

目录

1 概述	2
2 基本微分方程的无量纲化	2
2.1 出发方程	2
2.2 无量纲化过程	2
2.3 两个代表性项的变换	3
2.4 无量纲控制方程	3
3 雷诺数	3
3.1 定义与物理意义	3
3.2 惯性力与粘性力的比较	4
4 量纲分析的本质——球体阻力示例	4
4.1 问题描述	4
4.2 不用量纲分析时的困境	4
4.3 量纲分析的威力	4
5 Buckingham Π 定理	5
5.1 定理陈述	5
5.2 标准步骤	5
5.3 示例 7.1——光滑球体阻力（完整推导）	5
5.4 示例 7.2——管道流动压降（完整推导）	7
6 流体力学中的重要无量纲数	8
7 流动相似性与模型试验	8
7.1 三种相似性条件	8
7.2 示例 7.4——声纳换能器的阻力预测（完整推导）	8

8 小结

9

1 概述

在流体力学中，我们常常面临一个实际困难：物理问题涉及的参数太多，直接进行实验所需的变量组合呈指数增长。本章介绍的**量纲分析**（Dimensional Analysis）是一种强大的工具，能够：

1. 将控制方程无量纲化，揭示关键的相似参数
2. 将有量纲的物理关系简化为无量纲群之间的关系
3. 为模型试验提供相似准则

2 基本微分方程的无量纲化

2.1 出发方程

考虑二维、定常、不可压缩、牛顿流体的流动。控制方程为：

连续性方程（不可压缩）：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Navier-Stokes 方程（ x 和 y 方向）：

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

2.2 无量纲化过程

引入无量纲变量，用星号（*）标记：

1. **长度**：除以参考长度 L ： $x^* = x/L$, $y^* = y/L$
2. **速度**：除以参考速度 V_∞ （自由来流速度——远上游未受物体扰动的流速）： $u^* = u/V_\infty$, $v^* = v/V_\infty$
3. **压力**：除以 ρV_∞^2 （动压的两倍）： $p^* = p/(\rho V_\infty^2)$

其中 V_∞ 为自由来流速度（the freestream velocity），即远上游流场未受物体影响的均匀来流速度。

将 $x = x^*L$, $y = y^*L$, $u = u^*V_\infty$, $v = v^*V_\infty$, $p = p^*\rho V_\infty^2$ 代入方程。

2.3 两个代表性项的变换

对流项:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u^* V_\infty \frac{\partial(u^* V_\infty)}{\partial(x^* L)} = \frac{V_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \quad (4)$$

粘性项:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(u^* V_\infty)}{\partial(x^* L)^2} = \frac{V_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad (5)$$

2.4 无量纲控制方程

将连续性方程除以 V_∞/L :

$$\boxed{\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0} \quad (6)$$

将 N-S 方程除以 $\rho V_\infty^2/L$:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V_\infty L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (7)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{gL}{V_\infty^2} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu}{\rho V_\infty L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (8)$$

3 雷诺数

3.1 定义与物理意义

无量纲化过程中自然出现的组合 $\mu/(\rho V_\infty L)$ 的倒数即为**雷诺数** (Reynolds Number):

$$\boxed{Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}} \quad (9)$$

其中各量的物理含义:

- ρ : 流体密度 (kg/m^3)
- V : 特征速度 (m/s), 通常取自由来流速度 V_∞
- L : 特征长度 (m), 如管径、翼弦长度、球体直径等
- μ : 动力粘度 ($\text{Pa}\cdot\text{s}$ 或 $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$)
- $\nu = \mu/\rho$: 运动粘度 (m^2/s)

3.2 惯性力与粘性力的比较

雷诺数本质上衡量了惯性力与粘性力的相对大小：

- 惯性力 $\propto \rho V^2 L^2$ ：代表流体抵抗运动状态变化的能力（动量变化的量级）
- 粘性力 $\propto \mu V L$ ：代表内部摩擦/抵抗变形的能力
- $Re \gg 1$ ：惯性力主导 $\rightarrow$ 流动趋于湍流
- $Re \ll 1$ ：粘性力主导 $\rightarrow$ 流动保持层流

同时， gL/V_∞^2 是 Froude 数平方的倒数 ($1/Fr^2$)，代表重力与惯性力之比。

4 量纲分析的本质——球体阻力示例

4.1 问题描述

考虑光滑球体在无限流体中受到的阻力 F 。阻力依赖于四个有量纲参数：

$$F = f(D, V, \rho, \mu) \quad (10)$$

其中 D 为球直径， V 为来流速度， ρ 为密度， μ 为粘度。

4.2 不用量纲分析时的困境

如果直接进行实验来确定阻力函数 f ：

- 需要系统地改变四个参数 (D, V, ρ, μ)，每个参数取多个值
- 以每个参数取 5 个值为例，需进行 $5^4 = 625$ 组实验
- 结果难以呈现——需要四张图，每张图中固定三个参数量
- 每种球/流体组合都需要重复全套实验

4.3 量纲分析的威力

通过量纲分析，可以将四个参数的关系简化为：

$$\boxed{\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)} \quad (11)$$

即阻力系数 C_D 只是雷诺数 Re 的函数：

$$C_D = f(Re) \quad (12)$$

- 只需要改变一个变量 (Re)，即可确定一个关系曲线
- 结果是**普适的**——适用于任何球直径 D 、任何速度 V 、任何流体（任意 ρ 和 μ ）的组合
- 实验数据可以用**一张图** (C_D vs Re) 完整呈现

这就是量纲分析的核心价值：**用最少的无量纲变量替代众多的有量纲变量，找出物理问题的本质依赖关系。**

5 Buckingham Π 定理

5.1 定理陈述

n 个有量纲物理参数之间的关系可以简化为 $n - m$ 个无量纲 Π 群之间的关系，其中 m 为所涉及的基本量纲数（通常 $m = r$ ， r 为基本量纲数）。

5.2 标准步骤

1. 列出所有有量纲参数。设参数总数为 n 。
2. 选择基本量纲系统。常用 MLt（质量-长度-时间）或 FLt（力-长度-时间）。
3. 列出所有参数在基本量纲下的量纲。确定基本量纲数 r 。
4. 选择 $m = r$ 个**重复参数 (repeating parameters)**。这些参数必须包含所有基本量纲，且彼此独立。通常选 ρ （含 M）、 V （含 t）、 D （含 L）。
5. 依次将重复参数与每个非重复参数组合，形成 $n - m$ 个无量纲 Π 群。通过求解量纲方程确定各参数的指数。
6. 验证每个 Π 群确为无量纲。

5.3 示例 7.1——光滑球体阻力（完整推导）

步骤 1: $n = 5$ 个参数: F, V, D, ρ, μ 。

步骤 2: 选择 MLt 基本量纲系统。

步骤 3: $r = 3$ (M, L, t)。各参数量纲:

	F	V	D	ρ	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
t	-2	-1	0	0	-1

步骤 4: 选择 ρ, V, D 为重复参数 ($m = r = 3$)。

步骤 5: $n - m = 2$ 个 Π 群。

第一个 Π 群——阻力系数:

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F \quad (13)$$

量纲方程: $(M/L^3)^a (L/t)^b (L)^c (ML/t^2) = M^0 L^0 t^0$

令指数相等:

$$M : a + 1 = 0 \implies a = -1 \quad (14)$$

$$L : -3a + b + c + 1 = 0 \implies c = -2 \quad (15)$$

$$t : -b - 2 = 0 \implies b = -2 \quad (16)$$

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = C_D \quad (\text{阻力系数}) \quad (17)$$

第二个 Π 群——雷诺数倒数:

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu \quad (18)$$

量纲方程: $(M/L^3)^d (L/t)^e (L)^f (M/(Lt)) = M^0 L^0 t^0$

$$M : d + 1 = 0 \implies d = -1 \quad (19)$$

$$L : -3d + e + f - 1 = 0 \implies f = -1 \quad (20)$$

$$t : -e - 1 = 0 \implies e = -1 \quad (21)$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re} \quad (22)$$

步骤 6——验证无量纲性:

用 FLt 系统验证 Π_1 :

$$[\Pi_1] = \frac{F}{[Ft^2/L^4][L^2/t^2][L^2]} = \frac{F}{F} = 1 \quad (\text{无量纲}) \quad (23)$$

验证 Π_2 :

$$[\Pi_2] = \frac{Ft/L^2}{[Ft^2/L^4][L/t][L]} = \frac{Ft/L^2}{Ft/L^2} = 1 \quad (\text{无量纲}) \quad (24)$$

最终函数关系:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \implies C_D = f(Re) \quad (25)$$

5.4 示例 7.2——管道流动压降（完整推导）

步骤 1: $n = 7$ 个参数: $\Delta p, \rho, \mu, \bar{V}, l, D, e$ (粗糙度高度)。

步骤 2-3: 基本量纲 MLt, $r = 3$ 。

	Δp	ρ	μ	$\bar{V}$	l	D	e
M	1	1	1	0	0	0	0
L	-1	-3	-1	1	1	1	1
t	-2	0	-1	-1	0	0	0

步骤 4: 选择 $\rho, \bar{V}, D$ 为重复参数 ($m = 3$)。

步骤 5: $n - m = 4$ 个 Π 群。

Π_1 (欧拉数): $\Pi_1 = \rho^a \bar{V}^b D^c \Delta p$

$$M: a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1; L: -3a + b + c - 1 = 0 \Rightarrow c = 0; t: -b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} \quad (\text{欧拉数 } Eu) \quad (26)$$

Π_2 (雷诺数倒数): $\Pi_2 = \rho^d \bar{V}^e D^f \mu$

$$M: d + 1 = 0 \Rightarrow d = -1; L: -3d + e + f - 1 = 0 \Rightarrow f = -1; t: -e - 1 = 0 \Rightarrow e = -1$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \bar{V} D} = \frac{1}{Re} \quad (27)$$

Π_3 (长径比): $\Pi_3 = \rho^g \bar{V}^h D^i l$

$$M: g = 0; L: -3g + h + i + 1 = 0 \Rightarrow i = -1; t: -h = 0 \Rightarrow h = 0$$

$$\Pi_3 = \frac{l}{D} \quad (28)$$

Π_4 (相对粗糙度): $\Pi_4 = \rho^j \bar{V}^k D^l e$

$$M: j = 0; L: -3j + k + l + 1 = 0 \Rightarrow l = -1; t: -k = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\Pi_4 = \frac{e}{D} \quad (\text{相对粗糙度}) \quad (29)$$

最终函数关系:

$$\boxed{\frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = f\left(\frac{\rho \bar{V} D}{\mu}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)} \quad (30)$$

此结果即为 Darcy-Weisbach 摩擦因子的理论基础: 压降无量纲量 $\Delta p/(\rho \bar{V}^2)$ 是 Re 、 l/D 和 e/D 的函数。

6 流体力学中的重要无量纲数

名称	符号	定义	物理意义
雷诺数	Re	$\frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$	惯性力 / 粘性力
弗劳德数	Fr	$\frac{V}{\sqrt{g L}}$	惯性力 / 重力
欧拉数	Eu	$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}$	压力 / 惯性力（也称压力系数 C_p ）
韦伯数	We	$\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$	惯性力 / 表面张力
马赫数	Ma	$\frac{V}{c}$	流速 / 声速（压缩性效应）

7 流动相似性与模型试验

7.1 三种相似性条件

模型试验必须满足以下条件才能保证模型流动与原型流动相似：

1. **几何相似 (Geometric Similarity)**：模型与原型具有相同的形状，仅相差一个常数比例因子。所有对应长度之比 $L_m/L_p = \lambda$ 为常数。

2. **运动相似 (Kinematic Similarity)**：对应点上的速度方向相同，大小相差一个常数比例因子。 $V_m/V_p = \text{常数}$ 。运动相似需要几何相似为前提。

3. **动力相似 (Dynamic Similarity)**：对应点上的力矢量平行，大小相差一个常数比例因子。需要：

- 几何相似
- 运动相似
- 相关无量纲参数值相同（通常要求 $Re_m = Re_p$ ）

当动力相似成立时，模型和原型的无量纲力（如 C_D 、 C_L ）相等，可以由此预测原型性能。

7.2 示例 7.4——声纳换能器的阻力预测（完整推导）

原型参数：

- 直径 $D_p = 0.3048 \text{ m}$ (1 ft 球体)
- 拖曳速度 $V_p = 5 \text{ knots} = 9.26 \text{ km/h} = 2.572 \text{ m/s}$
- 介质：海水， 4.44°C ， $\rho_p = 1025 \text{ kg/m}^3$ ， $\nu_p = 1.57 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

模型参数：

- 直径 $D_m = 0.1524 \text{ m}$ (6 in)
- 介质: 标准空气 (STP), $\rho_m = 1.227 \text{ kg/m}^3$, $\nu_m = 1.458 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

原型雷诺数:

$$Re_p = \frac{V_p D_p}{\nu_p} = \frac{2.572 \times 0.3048}{1.57 \times 10^{-6}} = 4.99 \times 10^5 \quad (31)$$

风洞所需速度 (令 $Re_m = Re_p$):

$$V_m = \frac{Re_m \nu_m}{D_m} = \frac{4.99 \times 10^5 \times 1.458 \times 10^{-5}}{0.1524} = 47.75 \text{ m/s} \quad (32)$$

此速度足够低 ($Ma \approx 0.14$), 可忽略压缩性效应。

由动力相似推算原型阻力:

由 $Re_m = Re_p$, 有 $C_{D,m} = C_{D,p}$, 即:

$$\left. \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right|_m = \left. \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right|_p \quad (33)$$

模型阻力 $F_m = 2.669 \text{ N}$ (0.60 lbf), 则:

$$F_p = F_m \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \right) \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left(\frac{D_p}{D_m} \right)^2 \quad (34)$$

$$= 2.669 \times \frac{1025}{1.227} \times \left(\frac{2.572}{47.75} \right)^2 \times \left(\frac{0.3048}{0.1524} \right)^2 \quad (35)$$

$$= 25.87 \text{ N} \quad (36)$$

注意事项: 如果原型可能出现空化 (高速近自由液面), 则风洞中的空气模型试验无法给出有用结果, 因为空化数不匹配。

8 小结

- 将控制方程无量纲化可自然引出雷诺数 $Re = \rho V L / \mu$
- 量纲分析能将 n 个有量纲参数简化为 $n - m$ 个无量纲 Π 群——显著降低实验和数据分析的复杂度
- Buckingham Π 定理的六个标准步骤是量纲分析的规范方法
- 关键无量纲数: Re (惯性/粘性)、 Fr (惯性/重力)、 Eu (压力/惯性)、 We (惯性/表面张力)、 Ma (惯性/压缩性)
- 模型与原型相似需满足几何相似、运动相似和动力相似三个层次
- 动力相似要求相关无量纲数相等——通常匹配 Re 即可, 但需注意空化、压缩性等额外物理效应的约束
- 量纲分析的结果具有**普适性**——一条 C_D vs Re 曲线适用于任意大小的球在任意流体中以任意速度运动的情况