

流体力学笔记——Lecture 8

不可压缩无粘流动

Chapter 6: Incompressible Inviscid Flow

目录

1 概述	2
2 从微分控制体推导 Bernoulli 方程	2
2.1 推导设置的假设条件	2
2.2 连续性方程的应用	2
2.3 动量方程的流向分量	2
2.3.1 表面力 F_{S_s}	3
2.3.2 体积力 F_{B_s}	3
2.3.3 动量通量	3
2.4 Bernoulli 方程	3
2.5 Bernoulli 方程的限制条件	4
2.6 示例 4.9——喷嘴流动	4
3 Euler 方程——无摩擦流动的动量方程	5
3.1 从 Navier-Stokes 方程到 Euler 方程	5
4 流线坐标系中的 Euler 方程	5
4.1 沿流线 (s 方向) 的 Euler 方程	5
4.2 法向 (n 方向) 的 Euler 方程	6
4.3 示例 6.1——弯管中的流动	7
5 Bernoulli 方程——Euler 方程沿流线的积分	7
5.1 从 Euler 方程推导 Bernoulli 方程	7
5.2 三种压力的定义	8
5.3 总压 (滞止压力) 的物理意义	8
5.4 压力测量	8
5.5 示例 6.2——皮托管测速	9

5.6 示例 6.3——喷嘴中的气流	9
5.7 示例 6.4——虹吸流动	9
5.8 示例 6.6——平移参考系中的 Bernoulli 方程	10
6 总结对比：两种推导路径	10
7 小结	11

1 概述

在许多工程问题中，流体的粘性效应相对于惯性效应和压力效应可以忽略不计。本章研究**不可压缩、无摩擦（无粘）流动**，核心成果是 **Bernoulli 方程**——流体力学中最著名、应用最广泛的方程之一。

本章从两个不同角度推导 Bernoulli 方程：

1. 对沿流线的**微分控制体**应用基本守恒定律
2. 从 **Navier-Stokes 方程**出发，令 $\mu = 0$ 得到 Euler 方程，再沿流线积分

两种推导得出相同的结果，加深了对 Bernoulli 方程适用范围的理解。

2 从微分控制体推导 Bernoulli 方程

2.1 推导设置的假设条件

考虑沿一根流管的一个无穷小控制体（微分控制体）。推导基于以下**四个关键假设**：

1. **定常流动**： $\partial\phi/\partial t = 0$ ，所有量不随时间变化
2. **无横穿流线流动**：流管表面无流体穿过
3. **不可压缩流动**： $\rho = \text{常数}$
4. **无摩擦**：忽略粘性力（ $\mu = 0$ ）

2.2 连续性方程的应用

对微分控制体应用连续性方程（定常、不可压缩）：

$$-\rho V_s A + \rho(V_s + dV_s)(A + dA) = 0 \quad (1)$$

展开并忽略二阶微分乘积 $dA dV_s$ ：

$$\boxed{V_s dA + A dV_s = 0} \quad (2)$$

这意味着 $\rho V_s A = \text{常数}$ ——即沿流管，质量流量守恒。

2.3 动量方程的流向分量

对微分控制体应用 s 方向的动量方程（定常流动）：

$$F_{S_s} + F_{B_s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} u_s \rho dV + \int_{CS} u_s \rho \mathbf{V} \cdot d\vec{A} \quad (3)$$

2.3.1 表面力 F_{S_s}

考虑作用在控制体上的压力分布。前后端面的压力以及周围流管表面的压力投影：

$$F_{S_s} = pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA \quad (4)$$

$$= -A dp - \frac{1}{2} dp dA \approx -A dp \quad (5)$$

其中 $(p + dp/2)$ 是流管表面的平均压力， dA 是流管表面积在 s 方向的投影分量。

2.3.2 体积力 F_{B_s}

重力在 s 方向的分量：

$$F_{B_s} = \rho g_s dV = \rho(-g \sin \theta) \left(A + \frac{dA}{2}\right) ds \quad (6)$$

$$\approx -\rho g A dz \quad (\because \sin \theta ds = dz) \quad (7)$$

其中 θ 为流线与水平面的夹角， dz 为沿流线的高程变化。

2.3.3 动量通量

$$\int_{CS} u_s \rho \mathbf{V} \cdot d\vec{A} = V_s(-\rho V_s A) + (V_s + dV_s)[\rho(V_s + dV_s)(A + dA)] \quad (8)$$

$$= -\rho V_s^2 A + (V_s + dV_s)\rho V_s A \quad (\text{利用连续性方程消去 } dA) \quad (9)$$

$$= \rho V_s A dV_s \quad (10)$$

2.4 Bernoulli 方程

将表面力、体积力和动量通量代入动量方程（注意定常流动下 $\partial/\partial t = 0$ ）：

$$-A dp - \rho g A dz = \rho V_s A dV_s \quad (11)$$

两边同除以 ρA ：

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = V_s dV_s = d\left(\frac{V_s^2}{2}\right) \quad (12)$$

重排得：

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) + g dz = 0 \quad (13)$$

对不可压缩流动 (ρ 为常数), 沿流线积分:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{常数} \quad (\text{沿一条流线})} \quad (14)$$

或乘以 ρ :

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gz = \text{常数} \quad (\text{沿一条流线})} \quad (15)$$

这就是著名的 **Bernoulli 方程**。

2.5 Bernoulli 方程的限制条件

再次强调 Bernoulli 方程成立必须满足的四个条件:

1. 定常流动
2. 不可压缩流动
3. 无摩擦流动
4. 沿一条流线

2.6 示例 4.9——喷嘴流动

水定常流过一水平喷嘴, 排出到大气中。入口直径 $D_1 = 75 \text{ mm}$, 出口直径 $D_2 = 25 \text{ mm}$, 流量 $Q = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ 。求入口所需的最小表压。

沿中心流线从入口 (1) 到出口 (2) 应用 Bernoulli 方程。假设 $z_1 = z_2$, $p_2 = p_{\text{atm}}$:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \quad (16)$$

$$p_{1,g} = p_1 - p_{\text{atm}} = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) \quad (17)$$

由连续性方程: $V_1 = Q/A_1 = 4Q/(\pi D_1^2)$, $V_2 = Q/A_2 = 4Q/(\pi D_2^2)$ 。

$$p_{1,g} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 D_1^4} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] \quad (18)$$

代入 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $Q = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$:

$$p_{1,g} = \frac{8 \times 1000 \times (0.02)^2}{\pi^2 \times (0.075)^4} \left[\left(\frac{75}{25} \right)^4 - 1 \right] \approx 820 \text{ kPa} \quad (19)$$

注意: 压力与 Q^2 成正比, 这可以从 Bernoulli 方程直接看出 ($p \propto V^2 \propto Q^2$)。

3 Euler 方程——无摩擦流动的动量方程

3.1 从 Navier-Stokes 方程到 Euler 方程

在 Lecture 7 中我们导出了不可压缩牛顿流体的 Navier-Stokes 方程：

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (20)$$

对于**无粘流动** (inviscid flow)，动力粘度 $\mu = 0$ ，粘性项消失。由此得到 **Euler 方程**：

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p} \quad (21)$$

在三个坐标方向上的分量形式为：

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (22)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (23)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (24)$$

Euler 方程描述了**无粘流体**中惯性力、压力梯度力和重力之间的平衡。

4 流线坐标系中的 Euler 方程

沿流线应用 Newton 第二定律，可以得到 Euler 方程在流线坐标系中的形式。

4.1 沿流线 (s 方向) 的 Euler 方程

考虑沿流线运动的流体微团 (边长 ds 、 dn 、 dx ，其中 x 垂直于 s - n 平面)。作用在 s 方向的力包括：

- **压力差**： $(p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2}) dn dx - (p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2}) dn dx = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dn dx$
- **重力分量**： $-\rho g \sin \beta ds dn dx$ ，其中 β 为流线切线与水平面的夹角

根据 Newton 第二定律 $F = ma$ ：

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \beta = \rho a_s \quad (25)$$

流线的切线方向与 s 重合， $\sin \beta = \partial z / \partial s$ ，且 $a_s = DV/Dt = \partial V / \partial t + V \partial V / \partial s$ 。因此：

$$\boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s}} \quad (26)$$

对于定常流动 ($\partial V / \partial t = 0$):

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} = 0} \quad (27)$$

当高度变化可忽略 (水平流动) 时:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (28)$$

这个方程直接表明: 沿流线, 压力下降对应速度增加, 压力上升对应速度减小。这是扩散段 (diffuser) 和收缩段 (nozzle) 设计的基本原理。

4.2 法向 (n 方向) 的 Euler 方程

在垂直于流线的 n 方向, 流体微团的加速度等于向心加速度:

$$a_n = -\frac{V^2}{R} \quad (29)$$

其中 R 为流线的局部曲率半径 (指向曲率中心)。负号是因为 n 的正方向指向曲率中心。

同理, n 方向的力平衡为:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \cos \beta = \rho a_n = -\rho \frac{V^2}{R} \quad (30)$$

其中 $\cos \beta = \partial z / \partial n$ 。整理得:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R}} \quad (31)$$

当高度变化可忽略时:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}} \quad (32)$$

这个方程表明: 在弯曲流线的法向方向上, 压力随距曲率中心的距离增大而增加。这意味着:

- 弯管外侧压力高, 内侧压力低
- 涡旋中心压力最低
- 河弯外侧水流快、易侵蚀 (因为 Bernoulli 方程: 压力高 $\rightarrow$ 速度低? 不, 这里涉及的是法向压力梯度与速度的关系)

4.3 示例 6.1——弯管中的流动

在弯曲矩形管道中（深 0.3 m，宽 0.1 m，内侧弯曲半径 $r_1 = 0.25$ m，外侧半径 $r_2 = 0.35$ m），通过测量内外壁的压差来确定空气流量。测得压差 $\Delta h = 40$ mm 水柱。

在 n 方向应用 Euler 方程（即径向 r 方向），忽略重力：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \rho \frac{V^2}{r} \quad (33)$$

积分：

$$p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (34)$$

因此：

$$V = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\rho_{\text{air}} \ln(r_2/r_1)}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{water}} g \Delta h}{\rho_{\text{air}} \ln(r_2/r_1)}} \quad (35)$$

代入数值（标准空气 $\rho_{\text{air}} = 1.23$ kg/m³）：

$$V = \sqrt{\frac{999 \times 9.81 \times 0.04}{1.23 \times \ln(0.35/0.25)}} \approx 30.8 \text{ m/s} \quad (36)$$

$$Q = VA = 30.8 \times 0.1 \times 0.3 = 0.924 \text{ m}^3/\text{s} \quad (37)$$

5 Bernoulli 方程——Euler 方程沿流线的积分

5.1 从 Euler 方程推导 Bernoulli 方程

对于定常流动，沿流线的 Euler 方程为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} + V \frac{dV}{ds} = 0 \quad (38)$$

注意在定常流动中， s 是唯一的独立变量，偏导数转化为全导数。乘以 ds ：

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + V dV = 0 \quad (39)$$

对不可压缩流动（ $\rho = \text{常数}$ ），沿流线积分：

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{常数} \quad (\text{沿一条流线})} \quad (40)$$

或乘以密度：

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{常数} \quad (\text{沿一条流线}) \quad (41)$$

这与第一节用微分控制体方法导出的结果完全一致。

5.2 三种压力的定义

Bernoulli 方程中包含三项，分别代表不同的压力：

名称	表达式	物理意义
静压 (Static Pressure) p	p	流体真实热力学压力，作用于与流向平行的表面
动压 (Dynamic Pressure)	$\frac{1}{2}\rho V^2$	流体动能等效的压力，仅在流动存在时产生
总压 (Stagnation Pressure) p_0	$p + \frac{1}{2}\rho V^2$	等熵滞止后的压力，等于静压与动压之和

忽略高度变化时：

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{常数} \quad (42)$$

5.3 总压（滞止压力）的物理意义

如果流体被无摩擦地减速到零速度（例如撞击在钝体前端），该点称为**滞止点**（Stagnation Point）。在该点：

$$V = 0 \implies p_0 = p_{\text{stagnation}} \quad (43)$$

总压（滞止压力） p_0 在整个无粘流场中沿流线守恒，是 Bernoulli 方程的**直接等价**表述：

Bernoulli 方程 = 总压沿流线守恒

5.4 压力测量

静压测量：壁面静压孔（方向与流向平行），只感应法向压力（即静压 p ）。

总压测量：正对来流的皮托管开口（方向与流向垂直），流体被滞止，感应总压 p_0 。

流速计算：已知静压和总压，流速可通过 Bernoulli 方程计算：

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \quad (44)$$

5.5 示例 6.2——皮托管测速

皮托管插入标准空气流中测量流速。总压与静压之差为 30 mm 汞柱。求流速。
沿滞止流线应用 Bernoulli 方程 ($\Delta z = 0$):

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \implies V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho_{\text{air}}}} \quad (45)$$

压差来自 U 型管 (汞柱):

$$p_0 - p = \rho_{\text{Hg}} g \Delta h = 1000 \times 9.81 \times (30 \times 10^{-3}) \times 13.6 = 4000.6 \text{ Pa} \quad (46)$$

$$V = \sqrt{\frac{2 \times 4000.6}{1.23}} \approx 80.8 \text{ m/s} \quad (47)$$

马赫数 $M = V/c = 80.8/343 \approx 0.236 < 0.3$, 不可压缩假设有效。

5.6 示例 6.3——喷嘴中的气流

空气低速定常流过水平喷嘴 ($A_1 = 0.1 \text{ m}^2$, $A_2 = 0.02 \text{ m}^2$), 出口速度 $V_2 = 50 \text{ m/s}$, 排入大气。求入口表压。

由连续性方程: $V_1 = V_2 A_2 / A_1 = 50 \times 0.02 / 0.1 = 10 \text{ m/s}$ 。

沿中心流线应用 Bernoulli 方程 ($z_1 = z_2$):

$$p_1 - p_{\text{atm}} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1.23}{2}(50^2 - 10^2) \approx 1.48 \text{ kPa} \quad (48)$$

5.7 示例 6.4——虹吸流动

U 型管用作虹吸, 弯管最高点在水面上方 1 m, 出口在水面下方 7 m。求自由射流速度和弯管处的最小绝对压力。

在水面 (1) 和出口 (2) 之间应用 Bernoulli 方程。 $V_1 \approx 0$ (大容器), $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$:

$$gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \implies V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 7} \approx 11.7 \text{ m/s} \quad (49)$$

在水面 (1) 和弯管点 A 之间应用 Bernoulli 方程 ($z_A = 1 \text{ m}$, $V_A = V_2 = 11.7 \text{ m/s}$):

$$p_A = p_{\text{atm}} + \rho g(z_1 - z_A) - \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad (50)$$

$$= 1.01 \times 10^5 + 999 \times 9.81 \times (-1) - \frac{1}{2} \times 999 \times (11.7)^2 \quad (51)$$

$$\approx 22.8 \text{ kPa (abs) 或 } -78.5 \text{ kPa (gage)} \quad (52)$$

注意: 弯管处的绝对压力仅 22.8 kPa, 远低于大气压 (101 kPa)。水的饱和蒸气压在常温下约 2.3 kPa, 所以如果弯管更高, 可能发生空化 (Cavitation)。

5.8 示例 6.6——平移参考系中的 Bernoulli 方程

一架轻型飞机以 150 km/h 飞行在标准大气中（高度 1000 m）。求机翼前缘的滞止压力以及翼面上某点（相对速度 60 m/s）的压力。

关键洞察：在固定于地面的观察者看来，流动是非定常的。但在**固定在机翼上的平移参考系**中，流动是定常的——远前方来流均匀且恒定。因此可以在此平移惯性参考系中应用 Bernoulli 方程。

在 1000 m 高度，标准大气参数： $p/p_{SL} = 0.8870$ ， $\rho/\rho_{SL} = 0.9075$ 。

$$p = 0.8870 \times 1.013 \times 10^5 = 8.96 \times 10^4 \text{ Pa} \quad (53)$$

$$\rho = 0.9075 \times 1.23 = 1.12 \text{ kg/m}^3 \quad (54)$$

自由来流速度 $V_\infty = 150 \times 1000/3600 = 41.7 \text{ m/s}$ 。

滞止点（机翼前缘）B： $V_B = 0$ ：

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = 8.96 \times 10^4 + \frac{1}{2} \times 1.12 \times (41.7)^2 = 90.6 \text{ kPa (abs)} \quad (55)$$

翼面点 B： $V_B = 60 \text{ m/s}$ ：

$$p_B = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(V_\infty^2 - V_B^2) \quad (56)$$

$$= 8.96 \times 10^4 + \frac{1}{2} \times 1.12 (41.7^2 - 60^2) \quad (57)$$

$$= 88.6 \text{ kPa (abs)} \quad (58)$$

马赫数 $M_B = 60/336 \approx 0.178 < 0.3$ ，不可压缩假设有效。

6 总结对比：两种推导路径

整个 Bernoulli 方程的建立存在两条平行的逻辑路径：

路径一：控制体法	路径二：微分方程法
对沿流线的微分控制体应用积分形式的守恒方程	从 Navier-Stokes 方程出发，令 $\mu = 0$ 得到 Euler 方程
在流线坐标系中表达 Euler 方程	直接处理宏观的力平衡
物理图像直观	数学推导严谨，适用于后续推广
结果： $\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{常数}$	结果： $\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{常数}$

两条路径得出一致的 Bernoulli 方程, 但路径二中的 **Euler 方程法向分量** ($\partial p/\partial n = \rho V^2/R$) 提供了超出 Bernoulli 方程的额外物理信息——关于弯曲流线中压力分布的知识。

7 小结

- Bernoulli 方程 $p/\rho + V^2/2 + gz = \text{常数}$ 成立需满足四个条件: **定常、不可压缩、无摩擦、沿一条流线**
- Euler 方程 $\rho D\mathbf{V}/Dt = \rho \vec{g} - \nabla p$ 是无粘流动的动量方程, 是 N-S 方程在 $\mu = 0$ 的特例
- 流线坐标系中的 Euler 方程:
 - 沿流线方向: 描述速度-压力-高度的变化关系 $\rightarrow$ 积分得 Bernoulli 方程
 - 法向: 描述弯曲流线中压力与速度的关系 $\partial p/\partial n = \rho V^2/R$
- 动压 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 是动能等效压力; 总压 p_0 是等熵滞止压力
- 皮托管 (Pitot tube) 利用总压与静压差测量流速: $V = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho}$
- 在平移惯性参考系中 (如飞机机翼坐标系), Bernoulli 方程仍然适用
- $\partial p/\partial n = \rho V^2/R$ 解释了弯管外侧压力高、内侧压力低, 以及弯道外侧流速快、侵蚀严重的现象