

流体力学笔记——Lecture 7

流体运动的微分分析导论

Chapter 5: Introduction to Differential Analysis of Fluid Motion

目录

1 概述	2
2 微分形式的连续性方程	2
2.1 直角坐标系中的推导	2
2.2 质量通量的计算	2
2.3 连续性方程的最终形式	3
2.4 特殊情况	3
2.5 示例 5.2——非定常微分连续性方程	4
3 流函数 (Stream Function)	4
3.1 定义与物理背景	4
3.2 流函数的性质	4
3.3 示例 5.4——墙角流动的流函数	5
4 流体微团的运动学	5
4.1 流体微团的运动分解	5
4.2 流体微团的加速度——物质导数	5
4.3 示例 5.5——Euler 法与 Lagrange 法中的加速度	6
4.4 流体微团的旋转与涡量	6
4.5 涡量的物理意义——两个例子	7
4.6 无旋流动	7
5 微分形式的动量方程	7
5.1 作用在流体微团上的力	7
5.2 牛顿第二定律应用于流体微团	8
5.3 牛顿流体的本构关系	8
5.4 Navier-Stokes 方程	9

6 小结

10

1 概述

前面章节通过控制体积法（积分形式）分析了宏观的流体运动。本章引入**微分分析法**，从微观角度描述流场中每一点的速度、压力和密度分布。微分分析的核心是导出流体运动的**控制微分方程**——连续性方程和动量方程（Navier-Stokes 方程），它们构成了计算流体力学（CFD）的理论基础。

本章主要涵盖四个主题：

1. 微分形式的**质量守恒**（连续性方程）
2. 二维不可压缩流动的**流函数**
3. 流体微团的**运动学**（平移、旋转、变形）
4. 微分形式的**动量方程**（Navier-Stokes 方程）

2 微分形式的连续性方程

2.1 直角坐标系中的推导

考虑一个固定在空间中的无穷小长方体控制体，边长为 dx 、 dy 、 dz 。在控制体的几何中心 O 处，流体的密度为 $\rho(x, y, z)$ ，速度分量为 $\mathbf{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ 。

将密度和速度在 x 方向上进行 Taylor 级数展开。在右表面（距中心 $+dx/2$ ）：

$$\rho|_{x+dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \cdots \approx \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (1)$$

$$u|_{x+dx/2} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (2)$$

同理，在左表面（距中心 $-dx/2$ ）：

$$\rho|_{x-dx/2} = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (3)$$

$$u|_{x-dx/2} = u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \quad (4)$$

2.2 质量通量的计算

通过左右两个 x 方向表面的净质量通量为：

$$(\rho \mathbf{V} \cdot d\vec{A})_x = \left[\rho|_{x+dx/2} u|_{x+dx/2} - \rho|_{x-dx/2} u|_{x-dx/2} \right] dydz \quad (5)$$

$$= \left[\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dydz \quad (6)$$

$$= \left[\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] dx dy dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \quad (7)$$

类似地, y 和 z 方向的净质量通量为:

$$(\rho \mathbf{V} \cdot d\vec{A})_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz \quad (8)$$

$$(\rho \mathbf{V} \cdot d\vec{A})_z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \quad (9)$$

2.3 连续性方程的最终形式

控制体内质量的变化率为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (10)$$

由质量守恒 (控制体内质量的增加率 = 净流入质量通量):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

引入 Nabla 算子 $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$, 可写为紧凑形式:

$$\boxed{\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (12)$$

这就是微分形式的连续性方程。

2.4 特殊情况

定常流动 ($\partial \rho / \partial t = 0$):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (13)$$

不可压缩流动 ($\rho = \text{常数}$):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V} = 0} \quad (14)$$

这是流体力学中最常用的连续性形式——速度场的散度为零意味着流体微团的体积在运动中保持不变。

2.5 示例 5.2——非定常微分连续性方程

汽车悬架中的气动支柱可简化为活塞-气缸模型。某时刻活塞距闭端距离 $L = 0.15$ m, 气体密度均匀为 $\rho = 18$ kg/m³, 活塞以 $V = 12$ m/s 速度远离闭端。假设气体速度沿 x 方向从封闭端线性变化到活塞端。

由于 ρ 在空间上均匀分布, $\partial\rho/\partial x = 0$, 且 $u = Vx/L$, 连续性方程简化为:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho \frac{V}{L} \quad (15)$$

代入数值:

$$\left. \frac{\partial\rho}{\partial t} \right|_{t=0} = -18 \text{ kg/m}^3 \times 12 \text{ m/s} \times \frac{1}{0.15 \text{ m}} = -1440 \text{ kg/(m}^3 \cdot \text{s)} \quad (16)$$

密度随时间的变化 $\rho(t) = \rho_0/(1 + Vt/L_0)$ 。

3 流函数 (Stream Function)

3.1 定义与物理背景

流线定义为在给定瞬时处处与速度方向相切的曲线。对于二维流动:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{streamline}} = \frac{v}{u} \implies u dy - v dx = 0 \quad (17)$$

对于**二维不可压缩流动**, 连续性方程为 $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ 。引入**流函数** $\psi(x, y, t)$, 定义为:

$$\boxed{u \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial x}} \quad (18)$$

自动满足连续性方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 0 \quad (19)$$

3.2 流函数的性质

沿一条流线, ψ 为常数:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v dx + u dy = 0 \quad (20)$$

流函数最重要的性质: **两条流线之间的体积流量等于它们流函数值的差。**

- 沿 x 为常数的线 AB : $Q = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$
- 沿 y 为常数的线 BC : $Q = \int_{x_1}^{x_2} v dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \psi_2 - \psi_1$

因此, $\Delta\psi$ 直接给出了单位深度上的体积流量 (单位 m²/s)。

3.3 示例 5.4——墙角流动的流函数

给定速度场 $\mathbf{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$, $A = 0.3 \text{ s}^{-1}$, 求流函数。

由 $u = Ax = \partial\psi/\partial y$, 对 y 积分:

$$\psi = \int \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + f(x) = Axy + f(x) \quad (21)$$

由 $v = -Ay = -\partial\psi/\partial x = -Ay - df/dx$, 得 $df/dx = 0$, 故 $f(x)$ 为常数。

$$\boxed{\psi = Axy + C} \quad (22)$$

取 $C = 0$, 流线方程 $\psi = 0.3xy \text{ m}^2/\text{s/m}$ (即 $xy = \text{常数}$ 为一族双曲线)。在第一象限, $u > 0$, $v < 0$, 流动向右下; 在第二象限, $u < 0$, $v < 0$, 流动向左下。

任意两条流线 ψ_1 和 ψ_2 之间的体积流量为 $Q_{1 \rightarrow 2} = |\psi_2 - \psi_1|$ 。

4 流体微团的运动学

4.1 流体微团的运动分解

一个有限尺寸的流体元在运动中可能经历四种基本变形模式 (如图 5.4 所示):

1. **平移 (Translation)**: 微团整体以速度 $\mathbf{V}$ 移动
2. **旋转 (Rotation)**: 微团绕自身中心旋转, 角速度 ω
3. **线变形 (Linear Deformation)**: 微团沿各方向的伸长或收缩
4. **角变形 (Angular Deformation/Shear)**: 微团形状的剪切扭曲

4.2 流体微团的加速度——物质导数

在 Euler 描述中, 速度场 $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ 是空间和时间的函数。追随一个特定流体微团, 其速度的变化 (总加速度) 为:

$$d\mathbf{V}_p = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dt \quad (23)$$

除以 dt 并利用 $dx_p/dt = u$, $dy_p/dt = v$, $dz_p/dt = w$:

$$\boxed{\vec{a}_p = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}} \quad (24)$$

D/Dt 称为**物质导数** (Substantial Derivative / Material Derivative)。

也可以用梯度算子紧凑表示:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}} \quad (25)$$

加速度由两部分组成：

- **对流加速度** $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ ：流体微团由于空间位置变化（从一点运动到另一点）导致的加速度
- **局部加速度（当地加速度）** $\partial \mathbf{V} / \partial t$ ：固定点上速度随时间变化导致的加速度

在直角坐标系中，三个方向的分量为：

$$a_{x_p} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (26)$$

$$a_{y_p} = \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (27)$$

$$a_{z_p} = \frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (28)$$

4.3 示例 5.5——Euler 法与 Lagrange 法中的加速度

考虑二维定常不可压缩收缩通道流动，水平中心线上的速度为 $\mathbf{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$ 。

(a) **Euler 法**：在 x 轴上 $v = w = 0$ ， $u = V_1(1 + x/L)$ ：

$$a_{x_p}(x) = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} = V_1 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{V_1}{L} = \frac{V_1^2}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \quad (29)$$

在入口 $x = 0$ 处： $a_{x_p} = V_1^2/L$ ；在出口 $x = L$ 处： $a_{x_p} = 2V_1^2/L$ 。

(b) **Lagrange 法**：追踪一个初始位于 $x = 0$ 的微团。由 $dx_p/dt = V_1(1 + x_p/L)$ 积分：

$$x_p(t) = L(e^{V_1 t/L} - 1), \quad u_p(t) = V_1 e^{V_1 t/L}, \quad a_{x_p}(t) = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L} \quad (30)$$

两种方法得出的加速度在对应位置/时刻一致，验证了物质导数的正确性。

4.4 流体微团的旋转与涡量

流体微团在三维流场中可以绕三个坐标轴旋转。旋转角速度矢量为：

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}} \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[\hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (32)$$

涡量 (Vorticity) 定义为旋转角速度的两倍:

$$\boxed{\vec{\zeta} = \nabla \times \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\omega}} \quad (33)$$

4.5 涡量的物理意义——两个例子

例 1: 平行平板间的剪切流。设 $\mathbf{V} = (y, 0)$, 则:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(0 - 1) = -\frac{1}{2} \quad (34)$$

负号表示顺时针旋转; 常涡量意味着均匀剪切场 ($\tau = \mu \partial u / \partial y$ 为常数)。

例 2: 刚性旋转流。设 $\mathbf{V} = (-y, x)$ (绕原点以 1 rad/s 旋转的流场), 则:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1 \quad (35)$$

涡量为 2 rad/s, 恰为角速度的两倍, 验证了 $\vec{\zeta} = 2\boldsymbol{\omega}$ 。

4.6 无旋流动

当 $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ (即 $\omega = 0$) 时, 流动称为**无旋流动** (Irrotational Flow)。此时存在速度势函数 ϕ 使得 $\mathbf{V} = \nabla \phi$ 。无旋假设在外部流动中非常有用 (见 Lecture 8 和 11)。

5 微分形式的动量方程

5.1 作用在流体微团上的力

考虑一个边长为 dx 、 dy 、 dz 的无穷小微团, 作用力分为:

体积力 (Body Force): 重力 $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$ 。

表面力 (Surface Force): 由正应力 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ 和切应力 $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ 组成。

以 x 方向为例, 表面力的合成为:

$$\begin{aligned}
dF_{S_x} = & \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dy dz \\
& + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] dx dz \\
& + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right] dx dy
\end{aligned} \tag{36}$$

$$= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \tag{37}$$

加上体积力 $dF_{B_x} = \rho g_x dx dy dz$:

$$dF_x = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \tag{38}$$

5.2 牛顿第二定律应用于流体微团

由 $d\vec{F} = dm \cdot D\mathbf{V}/Dt$ 且 $dm = \rho dx dy dz$, 得:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{39}$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{40}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{41}$$

这是微分动量方程的最一般形式, 适用于任何连续介质, 尚不涉及材料本构关系。

5.3 牛顿流体的本构关系

对于**牛顿流体** (Newtonian Fluid), 应力与应变率呈线性关系。对于不可压缩牛顿流体 ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{42}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{43}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{44}$$

正应力由压力项和粘性项组成:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (45)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (46)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (47)$$

注意压力 p 的定义为三个正应力均值的负值： $p \equiv -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ 。

5.4 Navier-Stokes 方程

将牛顿流体本构关系代入一般微分动量方程，假设不可压缩流动（ $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ）且粘度 μ 为常数，得到著名的 **Navier-Stokes 方程**：

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (48)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (49)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (50)$$

用矢量形式紧凑表示为：

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (51)$$

其中各项的物理意义：

- $\rho D\mathbf{V}/Dt$ ：惯性项——单位体积流体的质量 $\times$ 加速度
- $\rho \vec{g}$ ：体积力项——重力
- $-\nabla p$ ：压力梯度项——压力差驱动的流动
- $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$ ：粘性扩散项——动量在粘性作用下的扩散

N-S 方程是一个二阶非线性偏微分方程组。由于对流项 $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ 的存在，方程为非线性，这使得解析求解极为困难。事实上，**Navier-Stokes 方程解的存在性与光滑性**是 Clay 数学研究所的七大千禧年问题之一。

当 $\mu = 0$ （无粘）时，N-S 方程简化为 **Euler 方程**（将在 Lecture 8 中详细讨论）：

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (52)$$

6 小结

- 微分连续性方程: $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \partial \rho / \partial t = 0$; 不可压缩时 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
- 流函数 ψ 定义: $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$; $\Delta \psi$ 等于单位深度流量
- 物质导数 $D\mathbf{V}/Dt = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \partial \mathbf{V} / \partial t$ 包含对流加速度和当地加速度
- 流体微团的四种基本运动: 平移、旋转、线变形、角变形
- 涡量 $\vec{\zeta} = \nabla \times \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\omega}$; 无旋流动中涡量为零
- Navier-Stokes 方程: $\rho D\mathbf{V}/Dt = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$, 结合连续性方程构成 CFD 的理论基础
- 对牛顿流体, 粘性应力与应变率成正比, 比例系数为动力粘度 μ