

流体力学笔记——Lecture 12

地球物理流体力学导论

Introduction to Geophysical Fluid Mechanics

目录

1	概述——什么是地球物理流体动力学	2
2	惯性参考系中的运动方程	2
3	旋转参考系中的坐标变换	2
3.1	物理直觉：从秋千椅到地球	2
3.2	矢量形式的通用变换	3
3.3	旋转系中的完整运动方程	4
4	科里奥利力	4
4.1	地球的旋转参数	4
4.2	球面上的科里奥利加速度	4
4.3	两个良好近似——科里奥利参数的简化	4
4.4	科里奥利力的方向	5
4.5	实例——飞行中的科里奥利力	5
4.6	Rossby 数	5
4.7	旋转效应显著性的尺度判断	6
4.8	科里奥利力对雨滴的影响	6
5	离心加速度与有效重力	6
5.1	离心力的梯度形式	6
5.2	位势 (Geopotential)	7
6	旋转系中的简化运动方程	7
7	角动量守恒	7
7.1	角动量方程回顾 (Lecture 4)	7
7.2	涡旋形成中的角动量守恒	8

7.3 科里奥利力的都市传说	8
8 小结	8

1 概述——什么是地球物理流体动力学

地球物理流体动力学 (Geophysical Fluid Dynamics, GFD) 是流体力学的一个分支, 研究地球 (及其他行星) 大气和海洋在重力和自转作用下的**大尺度运动**。

- **地球物理 (Geophysical)**: 旋转 (Rotation) + 层结 (Stratification) ——这两个效应定义了 GFD 的核心
- **流体 (Fluid)**: 大气与海洋——地球上最广阔的流体系统
- **动力学 (Dynamics)**: 流体在重力和摩擦力作用下的演化

GFD 的理论基础与经典流体力学相同——动量守恒 (Navier-Stokes 方程)、质量守恒 (连续性方程) 和能量守恒 (热力学能量方程)。但关键区别在于: 这些方程必须被转换到一个固定在旋转地球上、随地球一起转动的**非惯性参考系**。

2 惯性参考系中的运动方程

在惯性 (固定) 参考系中, 流体的状态由速度场 $\mathbf{V} = (u, v, w)$ 、压力 p 、密度 ρ 和温度 T 描述。

Navier-Stokes 方程 (惯性系):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1)$$

即: 质量 $\times$ 加速度 = 重力 + 压力梯度力 + 粘性力。

连续性方程 (质量守恒):

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

能量守恒:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{sys}} \quad (3)$$

3 旋转参考系中的坐标变换

3.1 物理直觉: 从秋千椅到地球

考虑一个简化的例子。一个人坐在旋转的秋千椅上 (类似于游乐场的旋转飞椅)。

从地面 (惯性系) 观察:

- 物体做圆周运动, 向心加速度 $A = V_t^2/r$, 方向指向圆心
- 向心力由绳索张力的水平分量提供

从旋转椅 (旋转系) 观察:

- 物体”静止”——需要有”离心力”来平衡张力的水平分量
- 如果物体在旋转系中有相对运动, 还会出现”科里奥利力”

设旋转系角速度为 Ω 。物体的惯性系绝对速度 V_I 与旋转系相对速度 v_{rot} 的关系:

$$V_I = v_{\text{rot}} + \Omega r \quad (4)$$

惯性系中的向心加速度:

$$A = \frac{(v_{\text{rot}} + \Omega r)^2}{r} = \frac{v_{\text{rot}}^2}{r} + 2\Omega v_{\text{rot}} + \Omega^2 r \quad (5)$$

三项的物理含义:

- $\frac{v_{\text{rot}}^2}{r}$: 相对向心加速度
- $2\Omega v_{\text{rot}}$: **科里奥利加速度**——仅当物体在旋转系中有相对运动时出现
- $\Omega^2 r$: **离心加速度**——仅依赖于位置, 不依赖于相对速度

3.2 矢量形式的通用变换

任意矢量 $\mathbf{A}$ 在惯性系和旋转系中的时间导数满足以下算子关系:

$$\left. \frac{D}{Dt} \right|_{\text{in}} = \left. \frac{D}{Dt} \right|_{\text{rot}} + \Omega \times \quad (6)$$

对位置矢量 $\mathbf{r}$ 应用:

$$\left. \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right|_{\text{in}} = \left. \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right|_{\text{rot}} + \Omega \times \mathbf{r} \implies \boxed{\mathbf{V}_{\text{in}} = \mathbf{V}_{\text{rot}} + \Omega \times \mathbf{r}} \quad (7)$$

对绝对速度矢量 $\mathbf{V}_{\text{in}}$ 再次应用:

$$\left. \frac{D\mathbf{V}_{\text{in}}}{Dt} \right|_{\text{in}} = \left. \frac{D(\mathbf{V}_{\text{rot}} + \Omega \times \mathbf{r})}{Dt} \right|_{\text{rot}} + \Omega \times (\mathbf{V}_{\text{rot}} + \Omega \times \mathbf{r}) \quad (8)$$

$$= \left. \frac{D\mathbf{V}_{\text{rot}}}{Dt} \right|_{\text{rot}} + 2\Omega \times \mathbf{V}_{\text{rot}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) \quad (9)$$

两项附加加速度:

- $-2\Omega \times \mathbf{V}_{\text{rot}}$: **科里奥利加速度**——垂直于旋转轴和速度矢量, 只改变方向不改变大小 (在旋转系中为表现力)
- $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$: **离心加速度**——方向沿 $\mathbf{r}$ 向外

3.3 旋转系中的完整运动方程

将变换后的加速度代入 Navier-Stokes 方程, 并将所有速度理解为旋转系中的量 (以下省略下标"rot"):

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (10)$$

4 科里奥利力

4.1 地球的旋转参数

地球的自转角速度:

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \text{ s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (11)$$

在纬度 ϕ 处, 距旋转轴的距离为 $R = a \cos \phi$, 其中 $a \approx 6370 \text{ km}$ 为地球平均半径。赤道处切向速度约为 $40000/24 \approx 1600 \text{ km/h}$ 。

4.2 球面上的科里奥利加速度

在地理坐标系 (x 向东, y 向北, z 向上) 中, 地球自转矢量在地理坐标中的分量为:

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \phi, \Omega \sin \phi) \quad (12)$$

速度矢量为 $\mathbf{V} = (u, v, w)$ (向东、向北、向上)。

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \Omega \cos \phi & \Omega \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$= (2\Omega \sin \phi v - 2\Omega \cos \phi w, -2\Omega \sin \phi u, 2\Omega \cos \phi u) \quad (14)$$

4.3 两个良好近似——科里奥利参数的简化

近似 1: 垂直方向的科里奥利加速度可忽略。 $\Omega u \sim 10^{-4} \text{ m/s}^2 \ll g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

近似 2: 大尺度流动中垂直速度远小于水平速度。 $w \ll u, v$ (因为大气层很薄——大气厚度 $\sim 10 \text{ km}$, 水平尺度 $\sim 100\text{--}1000 \text{ km}$)。

简化后的科里奥利加速度:

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \approx (2\Omega \sin \phi v, -2\Omega \sin \phi u, 0) = -f_c \vec{k} \times \mathbf{V} \quad (15)$$

其中**科里奥利参数** (Coriolis Parameter):

$$f_c = 2\Omega \sin \phi \quad (16)$$

关键性质:

- 在赤道 ($\phi = 0^\circ$): $f_c = 0$ ——科里奥利力消失
- 在北半球 ($\phi > 0$): $f_c > 0$
- 在南半球 ($\phi < 0$): $f_c < 0$
- 在两极 ($\phi = \pm 90^\circ$): $|f_c|$ 最大
- f_c 跨赤道变号

在苏州校区 ($\phi = 31.35^\circ\text{N}$):

$$f_c = 2 \times 7.27 \times 10^{-5} \times \sin(31.35^\circ) \approx 0.75 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \quad (17)$$

4.4 科里奥利力的方向

- **北半球:** 科里奥利力使运动向**右**偏转
- **南半球:** 科里奥利力使运动向**左**偏转

这一特征解释了北半球气旋逆时针旋转、信风带的偏转等大尺度现象。

4.5 实例——飞行中的科里奥利力

飞机以 $U = 800 \text{ km/h}$ 在北纬 31° 飞行:

$$a_c = 2\Omega \sin \phi U = 2 \times 7.27 \times 10^{-5} \times \sin(31^\circ) \times \frac{800}{3.6} = 0.021 \text{ m/s}^2 \quad (18)$$

约为重力的 0.2%，对短期飞行影响可忽略，但对长时间航线规划有累积效应。

4.6 Rossby 数

定义 **Rossby 数** 衡量惯性力与科里奥利力的相对重要性:

$$Ro = \frac{U}{f_c L} \quad (19)$$

其中 U 为特征水平速度, L 为特征水平长度尺度。

- $Ro \ll 1$: 科里奥利力主导——旋转效应显著 (大尺度地球物理流动)
- $Ro \gg 1$: 惯性力主导——旋转效应可忽略 (小尺度流动)

- $Ro \sim 1$: 两者相当

天气尺度流动 (Synoptic Scale): $U \sim 10 \text{ m/s}$, $L \sim 1000 \text{ km}$, $f_c \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$:

$$Ro = \frac{10}{10^{-4} \times 10^6} = 0.1 \ll 1 \quad (20)$$

科里奥利效应显著, 流动接近地转平衡 (Geostrophic Balance)。

4.7 旋转效应显著性的尺度判断

给定水平尺度 L , 若 $U \leq L/T_R$ ($T_R = 24 \text{ h}$, 即一天), 旋转效应重要:

长度尺度 L	旋转效应重要的速度上限	例子
1 m	$U \leq 0.012 \text{ mm/s}$	洗面池排水 (旋转可忽略)
10 m	$U \leq 0.12 \text{ mm/s}$	
1 km	$U \leq 1.2 \text{ cm/s}$	
10 km	$U \leq 12 \text{ cm/s}$	海陆风
100 km	$U \leq 1.2 \text{ m/s}$	
1000 km	$U \leq 12 \text{ m/s}$ (天气尺度)	
6371 km	$U \leq 74 \text{ m/s}$	全球环流

关键结论: 小尺度现象 (如洗手池漩涡传说) 不受科里奥利力控制——“马桶科里奥利力”是都市传说。大尺度现象 (台风、洋流、信风) 才显著受科里奥利力影响。

4.8 科里奥利力对雨滴的影响

一个在广州 (北纬 23°) 从 2500 m 高空下落的雨滴, 受到重力、线性阻力 ($-C\mathbf{V}$) 和科里奥利力的联合作用。科里奥利力在向东 (x 方向, 由 w 分量产生) 的分量为 $2\Omega \cos \phi w$ ($w < 0$ 下落, 故力向东), 随后向东的速度分量又通过科里奥利力产生向南的偏转。最终轨迹向东偏离。

5 离心加速度与有效重力

5.1 离心力的梯度形式

离心加速度可以写为标量势的梯度:

$$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{\Omega^2 r_\perp^2}{2} \right) \quad (21)$$

其中 $r_\perp = (a + z) \cos \phi \approx a \cos \phi$ 为距旋转轴的垂直距离。

5.2 位势 (Geopotential)

将真实重力势 ($-gz$) 与离心势合并, 定义**位势** Φ :

$$\Phi = -gz + \frac{\Omega^2 a^2 \cos^2 \phi}{2} \quad (22)$$

有效重力 (含离心效应):

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \Phi \quad (23)$$

有效重力 $\mathbf{g}^*$ 的方向并不严格指向地心, 而是略微偏离——这是地球呈扁球形的原因之一。地球的赤道半径比极半径长约 21 km。

6 旋转系中的简化运动方程

将有效重力 $\mathbf{g}^* = -\nabla \Phi$ 和科里奥利力 $-f_c \vec{k} \times \mathbf{V}$ 代入, 忽略垂直加速度 (静力平衡近似), 得到大尺度大气和海洋流动的基础方程:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_c v + \nu \nabla^2 u \quad (24)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_c u + \nu \nabla^2 v \quad (25)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (\text{静力平衡方程}) \quad (26)$$

这组方程构成了所有现代数值天气预报 (NWP) 和海洋环流模式 (OGCM) 的理论基础。

物理含义:

- 水平运动方程: 加速度 = 压力梯度力 + 科里奥利力 + 粘性力
- 垂直方向: 压力梯度力与重力平衡 (静力平衡) ——垂直加速度在天气尺度上可忽略

7 角动量守恒

7.1 角动量方程回顾 (Lecture 4)

对于控制体积, 角动量原理写为:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_s + \int_{CV} \mathbf{r} \times \mathbf{g} \rho dV + \mathbf{T}_{\text{shaft}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho dV + \int_{CS} \mathbf{r} \times \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (27)$$

7.2 涡旋形成中的角动量守恒

考虑在旋转台上进行的径向入流实验。忽略摩擦，单位质量绕竖直轴的绝对角动量守恒：

$$V_{\theta, \text{abs}} r = \text{常数} \quad (28)$$

其中绝对速度 $V_{\theta, \text{abs}} = v_{\theta} + \Omega r$ （相对速度 + 牵连速度）。

$$v_{\theta, 2} = \frac{\Omega r_1^2}{r_2} - \Omega r_2 \quad (29)$$

当流体从大半径 r_1 向小半径 r_2 汇聚时（ $r_2 \ll r_1$ ），相对周向速度 $v_{\theta, 2}$ 急剧增大。

应用——龙卷风：强烈辐合（径向入流）+ 角动量守恒 → 旋转急剧加速 → 龙卷风的强大环流。Elie, Manitoba 的龙卷风照片是这一机制的经典视觉例证。

7.3 科里奥利力的都市传说

厕所漩涡方向取决于半球——这是都市传说。对于直径 $\sim 0.3 \text{ m}$ 的马桶， $L/U \sim$ 数量级远小于 1 天，旋转效应完全可忽略。实际旋转方向由马桶的设计（注水方向和形状）决定。

8 小结

- **GFD** 研究旋转地球上大气和海洋的大尺度运动——核心要素：旋转 + 层结
- **坐标变换：**惯性系到旋转系的变换引入两项附加加速度：
 - 科里奥利加速度 $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ ：与速度垂直，在北半球使运动右偏
 - 离心加速度 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ ： $\propto r_{\perp}$ ，并入有效重力 g^*
- **科里奥利参数：** $f_c = 2\Omega \sin \phi$ ——赤道为零，两极最大，跨赤道变号
- **Rossby 数** $Ro = U/(f_c L)$ 衡量旋转效应的相对重要性： $Ro \ll 1$ 时科里奥利力主导（天气尺度： $Ro \sim 0.1$ ）
- **尺度判断：**只有当 $U \leq L/T_R$ （ $T_R = 24 \text{ h}$ ）时旋转效应才重要。小尺度现象（如洗手池）不受科里奥利力控制
- **静力平衡：** $\partial p / \partial z = -\rho g$ ——大尺度流动中垂直加速度可忽略
- **角动量守恒**解释了辐合区（龙卷风）中涡旋增强的物理机制
- 旋转系中的简化运动方程是数值天气预报和海洋模式的理论基础