

# 流体力学笔记 — Lecture 11

## 边界层基础

Chapter 9: External Incompressible Viscous Flow

made by 李昊泽

### 目录

|          |                                  |           |
|----------|----------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>概述</b>                        | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>边界层概念</b>                     | <b>3</b>  |
| 2.1      | 基本思想 . . . . .                   | 3         |
| 2.2      | 转捩 . . . . .                     | 3         |
| 2.3      | 零压力梯度平板边界层 . . . . .             | 3         |
| <b>3</b> | <b>边界层厚度的三种定义</b>                | <b>3</b>  |
| 3.1      | 扰动厚度 $\delta$ (99% 厚度) . . . . . | 3         |
| 3.2      | 位移厚度 $\delta^*$ . . . . .        | 4         |
| 3.3      | 动量厚度 $\theta$ . . . . .          | 4         |
| <b>4</b> | <b>层流平板边界层: Blasius 精确解</b>      | <b>4</b>  |
| 4.1      | 物理问题与控制方程 . . . . .              | 5         |
| 4.2      | Blasius 相似变换的动机 . . . . .        | 5         |
| 4.3      | 流函数的引入与相似变换 . . . . .            | 6         |
| 4.4      | 速度分量的详细推导 . . . . .              | 6         |
| 4.5      | 导出 Blasius 方程 . . . . .          | 7         |
| 4.6      | 边界条件的变换 . . . . .                | 8         |
| 4.7      | * 关键物理量的导出 . . . . .             | 9         |
| <b>5</b> | <b>动量积分方程</b>                    | <b>10</b> |
| 5.1      | 控制体设置 . . . . .                  | 10        |
| 5.2      | 连续性方程与面 $bc$ 的质量流量 . . . . .     | 10        |
| 5.3      | 动量方程与各表面的动量通量 . . . . .          | 11        |

|          |                          |           |
|----------|--------------------------|-----------|
| 5.4      | 各表面的作用力 . . . . .        | 12        |
| 5.5      | 动量积分方程的最终形式 . . . . .    | 12        |
| 5.6      | * 动量积分方程的使用流程 . . . . .  | 13        |
| <b>6</b> | <b>动量积分方程的应用：零压力梯度流动</b> | <b>14</b> |
| 6.1      | 简化 . . . . .             | 14        |
| 6.2      | 壁面剪应力的统一表达 . . . . .     | 14        |
| 6.3      | 抛物线速度剖面：详细推导 . . . . .   | 15        |

# 1 概述

**外部流动** (External Flow) 是指流体围绕浸没物体的流动, 如机翼绕流、平板上的流动等。在高雷诺数下, 粘性效应只在固体壁面附近极薄的区域 (**边界层**, Boundary Layer) 内重要, 边界层外的流动可视为无粘势流。这一革命性的概念由 Prandtl 于 1904 年提出, 使得对高雷诺数粘性流动的分析成为可能。

从方法论来看, 本章涉及的各类问题本质上仍是对**质量守恒**和**动量守恒**的应用与列式, 例如连续性方程描述边界层的排挤效应, 动量方程描述壁面摩擦力的产生与分布。文中引入的位移厚度  $\delta^*$ 、动量厚度  $\theta$  等概念, 其根本目的是将积分式中无法显式表达的速度亏缺封装为便于代数操作的长度量, 从而简化计算。部分推导内容仅供同学们拓展理解, 考试不作要求。

## 2 边界层概念

### 2.1 基本思想

绕流问题被划分为两个区域:

1. **边界层内** (近壁区): 粘性效应重要, 速度从壁面的零急剧增长到自由来流速度
2. **边界层外** (外流区): 粘性效应可忽略, 可用 Bernoulli 方程和势流理论描述

### 2.2 转捩

边界层内流动从层流向湍流的转捩没有唯一的临界雷诺数。实际转捩位置受来流湍流度、壁面粗糙度、压力梯度等多种因素影响。

### 2.3 零压力梯度平板边界层

对于流向放置的平板, 在没有压力梯度的情况下 (外部流速  $U$  为常数), 由 Bernoulli 方程可知边界层外的压力也恒定。这是最简单的边界层构型, 也是本章详细分析的对象。

## 3 边界层厚度的三种定义

边界层的厚度并非一个精确定义的量, 速度从零渐进地趋近  $U$ 。因此需要多种厚度定义来刻画边界层的不同方面。

### 3.1 扰动厚度 $\delta$ (99% 厚度)

最直观的定义: 速度达到自由来流速度 99% 的位置:

$$u(y = \delta) \approx 0.99 U \quad (1)$$

$\delta$  给出了边界层的**名义厚度**，常用于工程估算。

### 3.2 位移厚度 $\delta^*$

边界层使靠近壁面的流速降低，导致与无粘均匀流相比存在**质量流量损失**。位移厚度定义为：为使无粘均匀流产生相同的质量流量损失，需要将壁面向外移动的距离。

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (2)$$

**物理意义：** $\delta^*$  是边界层对外流造成的有效排挤效应。例如在风洞中，边界层使有效流通面积减小  $2\delta^*$ （每侧壁面各一个边界层），导致核心流加速。

**应用：**依托连续性方程  $\dot{m} = \rho U A_{\text{eff}} = \text{const}$  修正有效截面积，进而求解核心流速度  $U(x)$  及静压沿程变化。

### 3.3 动量厚度 $\theta$

边界层内速度降低同时也导致**动量流量损失**。动量厚度定义为：为使无粘均匀流产生相同的动量流量损失，需要将壁面向外移动的距离。

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (3)$$

**物理意义：** $\theta$  直接与壁面摩擦力相关，平板总摩擦阻力  $F = \rho U^2 b \theta_L$ 。

**应用：**依托动量积分方程  $\tau_w = \rho U^2 d\theta/dx$ （零压力梯度平板），求解壁面剪应力、局部摩擦系数及总摩擦阻力。

## 4 层流平板边界层：Blasius 精确解

**相似解的存在条件：**Blasius 相似解之所以成立，是因为平板边界层满足**零压力梯度**条件（ $dp/dx = 0$ ，外流速度  $U$  为常数）。在此条件下，边界层内不存在外加的流向压力驱动力，速度剖面仅由粘性扩散决定，不同  $x$  位置的速度剖面  $u/U$  对  $y/\delta$  均塌缩到同一条曲线。若压力梯度非零（如绕曲面流动），则不存在严格的自相似解，必须借助动量积分方程等近似方法。相似解的存在本质上是 PDE 的对称性：当流场无特征长度尺度时， $x$  和  $y$  可组合为单一相似变量  $\eta$ 。

## 4.1 物理问题与控制方程

考虑二维、定常、不可压缩流体以均匀速度  $U$  流过半无限平板 ( $x > 0$ )。在零压力梯度条件下，外部流速恒定。完整的边界层控制方程为：

连续性方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$x$ -动量方程（边界层近似的 N-S 方程）：

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

其中  $\nu = \mu/\rho$  为运动粘度。动量方程中省略了压力梯度项（ $dU/dx = 0$  故  $dp/dx = 0$ ）。

边界条件：

$$\text{在壁面}(y = 0) : u = 0, v = 0 \quad (\text{无滑移条件}) \quad (6)$$

$$\text{在边界层外缘}(y \rightarrow \infty) : u = U, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{与外部势流光滑匹配}) \quad (7)$$

## 4.2 Blasius 相似变换的动机

Blasius (1908) 注意到：将不同  $x$  位置的速度剖面  $u/U$  对  $y/\delta$  作图时，所有剖面塌缩到同一条曲线上，即解具有**自相似性** (self-similarity)。数学上，速度剖面  $u/U$  仅是某个无量纲距离的函数：

$$\boxed{\frac{u}{U} = g(\eta), \quad \eta \propto \frac{y}{\delta}} \quad (8)$$

其中  $g$  为待定的无量纲函数， $\eta$  是  $y$  方向坐标对当地边界层厚度的比值。

接下来需要确定  $\delta$  对  $x$  的依赖关系。考虑 Stokes 第一问题：平板在静止流体中突然起动，粘性扩散的渗透深度  $\sim \sqrt{\nu t}$ 。对于定常平板边界层，流体微团从  $x = 0$  运动到  $x$  所需时间  $t \sim x/U$ ，因此：

$$\delta \propto \sqrt{\nu t} \propto \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (9)$$

这也与量纲分析一致： $\nu x/U$  具有长度平方的量纲 ( $[L^2 T^{-1} \cdot L \cdot T/L] = [L^2]$ )。由此，Blasius 定义**无量纲相似变量**  $\eta$ ：

$$\boxed{\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}} \quad (10)$$

$\eta$  的物理意义： $y$  方向距离与当地边界层特征厚度的比值。 $\eta = 0$  对应壁面， $\eta$  增大对应向边界层外缘移动。

### 4.3 流函数的引入与相似变换

引入**流函数**  $\psi(x, y)$ , 其定义为:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11)$$

这一定义自动满足二维不可压缩连续性方程  $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ 。

基于相似性假设, Blasius 定义**无量纲流函数**  $f(\eta)$ :

$$\boxed{f(\eta) \equiv \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}}} \quad (12)$$

由此计算流向速度  $u$ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sqrt{\nu x U} f(\eta) \right] = \sqrt{\nu x U} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U} f'(\eta) \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U f'(\eta) \quad (13)$$

因此:

$$\boxed{\frac{u}{U} = f'(\eta)} \quad (14)$$

即  $g(\eta) = f'(\eta)$ ——前面引入  $g$  只是为说明自相似性的存在, 真正求解时直接用无量纲流函数  $f$ , 其导数即为无量纲速度剖面。

### 4.4 速度分量的详细推导

**流向速度  $u$ :**

由流函数定义:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sqrt{\nu x U} f(\eta) \right] = \sqrt{\nu x U} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \\ u &= \sqrt{\nu x U} \cdot \frac{df}{d\eta} \cdot \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U f'(\eta) \end{aligned} \quad (15)$$

其中记  $f'(\eta) \equiv df/d\eta$ 。结果直观:  $u/U = f'(\eta)$ , 纯为  $\eta$  的函数, 体现了自相似性。

**法向速度  $v$ :**

$$\begin{aligned}
 v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{\nu U} \sqrt{x} f(\eta) \right] \\
 &= -\sqrt{\nu U} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\eta) + \sqrt{x} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( y \sqrt{\frac{U}{\nu}} x^{-1/2} \right) = y \sqrt{\frac{U}{\nu}} \left( -\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2x} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = -\frac{\eta}{2x} \\
 v &= -\sqrt{\nu U} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} f + \sqrt{x} f' \left( -\frac{\eta}{2x} \right) \right] \\
 &= -\sqrt{\nu U} \left[ \frac{f}{2\sqrt{x}} - \frac{\eta f'}{2\sqrt{x}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$v > 0$  (边界层内  $\eta f' - f > 0$ )，表明边界层对来流有**排挤效应**，流体被向外推出。

## 4.5 导出 Blasius 方程

现在需要对动量方程中的每一项进行变换。

速度梯度  $\partial u / \partial x$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [U f'(\eta)] = U \frac{df'}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 &= U f'' \left( -\frac{\eta}{2x} \right) = -\frac{U}{2x} \eta f''(\eta)
 \end{aligned} \tag{17}$$

速度梯度  $\partial u / \partial y$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [U f'(\eta)] = U f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= U f'' \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(\eta)
 \end{aligned} \tag{18}$$

二阶导数  $\partial^2 u / \partial y^2$  (粘性项):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f'' \right] = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''' \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 &= U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''' \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \frac{U^2}{\nu x} f'''(\eta)
 \end{aligned} \tag{19}$$

代入动量方程:

将以上结果代入  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ :

$$\underbrace{(Uf')}_u \underbrace{\left(-\frac{U}{2x} \eta f''\right)}_{\partial u / \partial x} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f)\right]}_v \underbrace{\left[U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''\right]}_{\partial u / \partial y} = \nu \underbrace{\left[\frac{U^2}{\nu x} f'''\right]}_{\partial^2 u / \partial y^2} \quad (20)$$

逐项化简:

第一项 (对流项  $u \partial u / \partial x$ ):

$$-\frac{U^2}{2x} \eta f' f'' \quad (21)$$

第二项 (对流项  $v \partial u / \partial y$ ):

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f) \cdot U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f'' = \frac{U^2}{2x} (\eta f' - f) f'' = \frac{U^2}{2x} \eta f' f'' - \frac{U^2}{2x} f f'' \quad (22)$$

对流项之和:

$$\underbrace{-\frac{U^2}{2x} \eta f' f''}_{\text{第一项}} + \underbrace{\frac{U^2}{2x} \eta f' f'' - \frac{U^2}{2x} f f''}_{\text{第二项}} = -\frac{U^2}{2x} f f'' \quad (23)$$

其中  $\pm \frac{U^2}{2x} \eta f' f''$  相互抵消。

粘性项:

$$\nu \cdot \frac{U^2}{\nu x} f''' = \frac{U^2}{x} f''' \quad (24)$$

最终方程:

$$-\frac{U^2}{2x} f f'' = \frac{U^2}{x} f''' \quad (25)$$

两边乘以  $-2x/U^2$ , 得到 **Blasius 方程**:

$$\boxed{2f''' + f f'' = 0} \quad (26)$$

## 4.6 边界条件的变换

原始边界条件在相似变量下变为:

| 原始物理条件                                              | 相似变量表达                                            | 物理含义    |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------|
| $y = 0: u = 0$                                      | $\eta = 0: f' = 0$                                | 壁面无滑移   |
| $y = 0: v = 0$                                      | $\eta = 0: f = 0$                                 | 壁面不可穿透  |
| $y \rightarrow \infty: u = U$                       | $\eta \rightarrow \infty: f' = 1$                 | 与外流速度匹配 |
| $y \rightarrow \infty: \partial u / \partial y = 0$ | 自动满足 ( $f' \rightarrow 1$ 时 $f'' \rightarrow 0$ ) | 光滑匹配外流  |



因此完整的 Blasius 边值问题为：

$$\begin{cases} 2f''' + ff'' = 0, & \eta \in [0, \infty) \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \\ f'(\eta) \rightarrow 1 \text{ 当 } \eta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (27)$$

Blasius 方程  $2f''' + ff'' = 0$  为三阶非线性常微分方程，无解析解，需通过数值方法求解得到 Blasius 数值表：

#### 4.7 \* 关键物理量的导出

边界层名义厚度  $\delta$ ：

从 Blasius 的数值表中读取：当  $\eta = 5.0$  时， $u/U = f'(5.0) = 0.99155 \approx 0.99$ 。由  $\eta = y\sqrt{U/(\nu x)} = 5.0$ ：

$$\delta \approx \frac{5.0}{\sqrt{U/(\nu x)}} = \frac{5.0 x}{\sqrt{Re_x}} \quad (28)$$

位移厚度  $\delta^*$ ：

将积分从物理坐标变换到  $\eta$  坐标 ( $dy = d\eta\sqrt{\nu x/U}$ )：

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty (1 - f') d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} [\eta - f(\eta)]_{\eta=0}^{\eta=\infty} \quad (29)$$

其中  $[\eta - f(\eta)]_{\eta \rightarrow \infty}$  的值由 Blasius 数值表给出。

动量厚度  $\theta$ ：

类似地：

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f'(1 - f') d\eta \quad (30)$$

右端积分值由 Blasius 数值表给出。

壁面剪应力  $\tau_w$ ：

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) \quad (31)$$

其中  $f''(0)$  由 Blasius 数值表给出。

局部摩擦系数：

$$C_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{Re_x}} \quad (32)$$

总摩擦阻力系数（平板长  $L$ ，宽  $b$ ，单侧）：

$$F = \int_0^L \tau_w b dx = b \int_0^L \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) dx = 2\mu U b \sqrt{\frac{UL}{\nu}} f''(0) \quad (33)$$

$$C_{Df} \equiv \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 b L} = \frac{4f''(0)}{\sqrt{Re_L}} \quad (34)$$

法向速度与排挤效应：在边界层外缘  $\eta = 5$ ,

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} (\eta f' - f)_{\eta=5} \approx \frac{0.84}{\sqrt{Re_x}} \quad (35)$$

在  $Re_x = 10^4$  时  $v/U \approx 0.0084$  (0.84%); 在  $Re_x = 5 \times 10^5$  时  $v/U \approx 0.0012$  (0.12%)。这一数值是边界层对外流排挤效应的直接体现。

## 5 动量积分方程

Blasius 解只适用于零压力梯度平板层流。对于有压力梯度的任意形状物体，需要一种更通用的方法。von Kármán 于 1921 年提出了**动量积分方程** (Momentum Integral Equation, 又称 Kármán 积分关系式)，通过在边界层厚度方向积分动量方程而得到。

后续推导中反复用到以下原理：在微分控制体上， $x$  方向的面  $ab$  与面  $cd$  间距为  $dx$ ，任一物理量  $f$  在两面间的变化  $f|_{x+dx} - f|_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx$  (一阶 Taylor 展开)。因此控制体在  $x$  方向的净通量总归约为该量的  $x$  方向梯度乘以  $dx$ ——这正是  $\int_{CS} \rho u \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$  化为  $\frac{\partial}{\partial x} (\int \rho u^2 dy) dx$  的根源。下文的连续性分析与动量分析均基于这一操作。

### 5.1 控制体设置

考虑边界层内一个**微分控制体**  $abcd$ :

- 面  $ab$ : 垂直于  $x$  轴，位于  $x$  处，高度为  $\delta(x)$
- 面  $cd$ : 垂直于  $x$  轴，位于  $x + dx$  处，高度为  $\delta(x + dx)$
- 面  $ad$ : 与平板壁面重合，高度为零
- 面  $bc$ : 控制体上边界，位于  $y = \delta(x)$  处的斜线（随边界层增长而向外倾斜）
- 控制体宽度 ( $z$  方向): 取单位宽度  $w$

### 5.2 连续性方程与面 $bc$ 的质量流量

对于二维定常流动，控制体连续性方程为：

$$\sum \dot{m}_{\text{out}} + \sum \dot{m}_{\text{in}} = 0 \quad (36)$$

即  $\dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd} = 0$ ，其中各面流量定义为**流出为正**。

**面  $ab$  ( $x$  处, 流入):** 流过面  $ab$  的质量流量为速度剖面的积分（方向为  $+x$ ，对控制体而言是**流入**):

$$\dot{m}_{ab} = - \int_0^\delta \rho u(x, y) dy w \quad (37)$$

面  $cd$  ( $x + dx$  处, 流出): 利用 Taylor 展开  $\dot{m}_{cd} = \dot{m}_{ab} + \frac{\partial \dot{m}_{ab}}{\partial x} dx$ :

$$\dot{m}_{cd} = \int_0^\delta \rho u dy w + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w \quad (38)$$

面  $bc$  (顶面, 流入): 由连续性  $\dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd} = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{bc} &= -\dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd} \\ &= \int_0^\delta \rho u dy w - \left[ \int_0^\delta \rho u dy w + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w \end{aligned} \quad (39)$$

$\dot{m}_{bc}$  为负值说明面  $bc$  上有质量**流入**控制体, 对应外部流体通过边界层上缘进入边界层内的物理过程 (entrainment)。 $\dot{m}_{bc}$  的正值 (流入的大小) 为:

$$\text{面 } bc \text{ 的质量流入} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w$$

(40)

### 5.3 动量方程与各表面的动量通量

定常二维流动的  $x$ -动量方程为:

$$\sum F_x = \sum \dot{m}_{\text{out}} u_{\text{out}} + \sum \dot{m}_{\text{in}} u_{\text{in}} = \int_{CS} u \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} \quad (41)$$

各表面的  $x$ -动量通量 (以流出为正):

面  $ab$  (动量流入控制体):

$$\text{mf}_{ab} = - \int_0^\delta u \rho u dy w = - \int_0^\delta \rho u^2 dy w \quad (42)$$

面  $cd$  (动量流出控制体):

$$\text{mf}_{cd} = \int_0^\delta \rho u^2 dy w + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx w \quad (43)$$

面  $bc$  (动量通量): 流过面  $bc$  的流体速度为外部势流速度  $U(x)$  (因为面  $bc$  位于边界层与无粘外流的交界处)。质量流量为  $\dot{m}_{bc}$  的流入量 (正值), 由于流入控制体, 其动量贡献为:

$$\text{mf}_{bc} = U \cdot \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w \right] = -U \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w \quad (44)$$

总动量流出 (所有三个表面之和):

$$\begin{aligned} \int_{CS} u \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} &= \underbrace{- \int_0^\delta \rho u^2 dy w}_{\text{面 } ab} + \underbrace{\int_0^\delta \rho u^2 dy w + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx w}_{\text{面 } cd} - \underbrace{U \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w}_{\text{面 } bc} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx w - U \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta \rho u dy \right) dx w \end{aligned} \quad (45)$$

前两项  $\pm \int \rho u^2 dy$  相互抵消。

## 5.4 各表面的作用力

**压力分布假设：**对于薄边界层 ( $\delta \ll x$ )，假定压力  $p$  沿  $y$  方向均匀，即  $p = p(x)$  只依赖于  $x$ ，在同一  $x$  截面上  $p$  为常数。这是边界层理论的基本假设，源自  $y$  方向动量方程的量级分析。

**面  $ab$  ( $x$  方向力)：**

$$F_{ab} = p(x) \delta(x) w \quad (46)$$

**面  $cd$  ( $x$  方向力，向左，为负贡献)：**考虑  $x + dx$  处的压力  $p + \frac{dp}{dx} dx$  和边界层高度变化  $\delta + d\delta$ ：

$$F_{cd} = - \left( p + \frac{dp}{dx} dx \right) (\delta + d\delta) w \approx - \left( p\delta + p d\delta + \delta \frac{dp}{dx} dx \right) w \quad (47)$$

其中略去高阶小量  $dp \cdot d\delta$ 。

**面  $bc$  (顶面压力分量)：**面  $bc$  是倾斜的 ( $d\delta/dx$  为斜率)，压力在  $x$  方向的投影为  $p$  乘以  $y$  方向投影面积 (即高度变化量  $d\delta$ )。取平均压力  $p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx$ ：

$$F_{bc} = \left( p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx \right) d\delta w \approx p d\delta w \quad (48)$$

( $\frac{dp}{dx} dx \cdot d\delta$  为高阶小量，略去。)

**面  $ad$  (壁面剪切力，向左)：**

$$F_{ad} = -\tau_w dx w \quad (49)$$

**总  $x$  方向力：**

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{ab} + F_{cd} + F_{bc} + F_{ad} \\ &= [p\delta] w + \left[ -p\delta - p d\delta - \delta \frac{dp}{dx} dx \right] w + [p d\delta] w + [-\tau_w dx] w \\ &= -\delta \frac{dp}{dx} dx w - \tau_w dx w \end{aligned} \quad (50)$$

$p\delta$  和  $p d\delta$  项相互抵消：压力在  $x$  方向的净贡献来自压力梯度  $\frac{dp}{dx}$ ，与静压绝对值无关。

## 5.5 动量积分方程的最终形式

将动量流出和力的表达式代入动量方程  $\sum F_x = \int_{CS} u \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$ ，并除以  $w dx$ ：

$$-\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy \quad (51)$$

此即**动量积分的原始形式**。接下来利用以下变换将其表示为标准形式。

**变换 1: 引入 Bernoulli 方程:** 边界层外的无粘流动满足 Bernoulli 方程  $p + \frac{1}{2}\rho U^2 =$  常数, 对  $x$  求导得:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \quad (52)$$

当外部流动加速 ( $dU/dx > 0$ , 顺压梯度) 时, 压力沿流向减小 ( $dp/dx < 0$ ), 利于克服壁面摩擦。

将  $-\delta \frac{dp}{dx} = \rho U \frac{dU}{dx} \delta = \rho U \frac{dU}{dx} \int_0^\delta dy$  代入:

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy + U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy + \rho \frac{dU}{dx} \int_0^\delta U dy \quad (53)$$

**变换 2: 引入导数展开:**

$$U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy = \frac{\partial}{\partial x} \left( U \int_0^\delta \rho u dy \right) - \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho u dy \quad (54)$$

代入并整理:

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left( U \int_0^\delta \rho u dy \right) - \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho u dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho U dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u(U - u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho(U - u) dy \end{aligned} \quad (55)$$

**变换 3: 引入  $\delta^*$  和  $\theta$  的定义:**

$$\int_0^\delta \rho(U - u) dy = \rho U \delta^* \quad (56)$$

$$\int_0^\delta \rho u(U - u) dy = \rho U^2 \theta \quad (57)$$

最终得到 **Kármán 动量积分方程:**

$$\boxed{\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx}} \quad (58)$$

或展开为:

$$\boxed{\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) U \frac{dU}{dx}} \quad (59)$$

## 5.6 \* 动量积分方程的使用流程

1. **获取外流速度分布  $U(x)$ :** 由无粘势流理论确定 (取决于物体形状), 这一步独立于边界层计算
2. **假设一个合理的速度剖面:**  $u/U = f(\eta, \Lambda)$ , 其中  $\eta = y/\delta$ ,  $\Lambda$  为形状参数 (如 Pohlhausen 参数)

3. **推导**  $\tau_w$ 、 $\delta^*$ 、 $\theta$ ：由假设的速度剖面，将三个量用  $\delta$  和剖面参数表示：

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta} f'(0) \quad (60)$$

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-f) d\eta = \alpha \delta \quad (61)$$

$$\theta = \delta \int_0^1 f(1-f) d\eta = \beta \delta \quad (62)$$

4. **代入动量积分方程**：得到关于  $\delta(x)$  的一阶常微分方程

5. **求解**  $\delta(x)$ ：进而得到  $\tau_w(x)$ 、 $C_f(x)$ 、 $C_{Df}$  等

## 6 动量积分方程的应用：零压力梯度流动

### 6.1 简化

对于平板流动， $U = \text{常数}$ ，故  $dU/dx = 0$ ， $dp/dx = 0$ 。动量积分方程简化为：

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (63)$$

引入无量纲坐标  $\eta = y/\delta$  和速度剖面假设  $u/U = f(\eta)$ （仅依赖于  $\eta$ ）：

$$\theta = \delta \int_0^1 f(\eta) [1-f(\eta)] d\eta = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \equiv \beta \delta \quad (64)$$

其中  $\beta$  是仅取决于速度剖面形状的**无量纲常数**。动量积分方程进一步化为：

$$\boxed{\tau_w = \rho U^2 \beta \frac{d\delta}{dx}} \quad (65)$$

### 6.2 壁面剪应力的统一表达

对于任何假设的  $f(\eta)$ ，壁面剪应力均可写为：

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{d(u/U)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\mu U}{\delta} f'(0) \quad (66)$$

其中  $f'(0) \equiv df/d\eta|_{\eta=0}$ 。

将  $\tau_w$  的两个表达式联立：

$$\frac{\mu U}{\delta} f'(0) = \rho U^2 \beta \frac{d\delta}{dx} \implies \delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{U} \frac{f'(0)}{\beta} \quad (67)$$

积分（利用  $\delta(0) = 0$ ）得：

$$\delta^2 = \frac{2\nu x}{U} \frac{f'(0)}{\beta} \implies \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2f'(0)}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \quad (68)$$

### 6.3 抛物线速度剖面：详细推导

假设：  $u/U = a + b\eta + c\eta^2$ ，其中  $\eta \equiv y/\delta$ 。利用三个条件确定三个常数：

- $\eta = 0$ :  $u = 0 \Rightarrow a = 0$
- $\eta = 1$ :  $u = U \Rightarrow a + b + c = 1$
- $\eta = 1$ :  $\partial u / \partial y = 0 \Rightarrow b + 2c = 0$  (光滑匹配外流，最关键的条件)

解得  $b = 2$ ,  $c = -1$ , 故：

$$\frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2 = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (69)$$

壁面剪应力：

$$f'(0) = \frac{d}{d\eta}(2\eta - \eta^2)\Big|_{\eta=0} = (2 - 2\eta)\Big|_{\eta=0} = 2 \quad (70)$$

$$\tau_w = \frac{\mu U}{\delta} \cdot 2 = \frac{2\mu U}{\delta} \quad (71)$$

动量厚度系数  $\beta$ ：

$$\begin{aligned} \beta &= \int_0^1 f(1-f) d\eta = \int_0^1 (2\eta - \eta^2) [1 - (2\eta - \eta^2)] d\eta \\ &= \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta \\ &= \int_0^1 (2\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 - \eta^2 + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta \\ &= \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4) d\eta \\ &= \left[ \eta^2 - \frac{5}{3}\eta^3 + \eta^4 - \frac{\eta^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{5}{3} + 1 - \frac{1}{5} = \frac{15 - 25 + 15 - 3}{15} = \frac{2}{15} \approx 0.1333 \end{aligned} \quad (72)$$

求解  $\delta(x)$ ：

代入  $\tau_w = \rho U^2 \beta d\delta/dx$ ：

$$\frac{2\mu U}{\delta} = \rho U^2 \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (73)$$

$$\delta d\delta = \frac{15\mu}{\rho U} dx = \frac{15\nu}{U} dx \quad (74)$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15\nu x}{U} + C \quad (75)$$

由  $\delta(0) = 0$  得  $C = 0$ :

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{Ux}} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} \quad (76)$$

与 Blasius 精确解  $\delta/x = 5.0/\sqrt{Re_x}$  相比, 抛物线剖面高估约 10%。考虑到仅用了三个条件 (壁面速度、外流速度和光滑匹配) 而非完整的 N-S 方程, 这一精度已相当不错。

**摩擦系数:**

$$\begin{aligned} \tau_w &= \frac{2\mu U}{\delta} = \frac{2\mu U}{5.48 x / \sqrt{Re_x}} = \frac{2\mu U \sqrt{Re_x}}{5.48 x} = \frac{2\rho U^2}{5.48 \sqrt{Re_x}} \\ &= \frac{0.730 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \end{aligned} \quad (77)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}} \quad (78)$$