

流体力学笔记——Lecture 10

充分发展层流与流量测量

Chapter 8: Internal Incompressible Viscous Flow

目录

1 概述	2
2 入口段	2
2.1 物理机制	2
2.2 层流入口段长度	2
3 静止平行平板间的充分发展层流	2
3.1 问题设定	2
3.2 微分控制体方法——详细推导	3
3.3 速度分布的推导	3
3.4 Navier-Stokes 方程方法——交叉验证	3
3.5 剪应力分布	4
3.6 体积流量、平均速度和最大速度	4
3.7 上板以恒定速度 U 运动——Couette-Poiseuille 流	4
3.8 示例 8.1——活塞泄漏流	5
4 圆管中的充分发展层流——Hagen-Poiseuille 流	5
4.1 微分控制体方法——圆柱坐标推导	5
4.2 速度分布	6
4.3 体积流量——Hagen-Poiseuille 定律	6
4.4 示例 8.4——毛细管粘度计	7
5 流量测量	7
5.1 直接方法	7
5.2 节流式流量计——理论推导	7
5.3 实际流量与排放系数	8
5.4 临界流动（壅塞流）——可压缩流体	8

5.5 其他流量计	8
6 小结	9

1 概述

本章研究**内部不可压缩粘性流动**，重点讨论充分发展层流的速度分布、流量与压降的关系，以及各种流量测量方法。内部流动（如管道、平板间流动）的特征是流动被固体边界完全包围，粘性效应在整个流场中都起重要作用。

2 入口段

2.1 物理机制

当流体进入管道时，壁面的**无滑移条件**（ $u = 0$ at wall）导致边界层从壁面开始发展。随着流动向下游推进，边界层逐渐增厚，最终在管道中心线处汇聚。汇聚之后的区域称为**充分发展流动区**（Fully Developed Flow Region），此区域内速度剖面不再随 x 变化。

2.2 层流入口段长度

对于 $Re < 2300$ 的层流，入口段长度满足：

$$\frac{L}{D} \simeq 0.06 \frac{\rho V D}{\mu} = 0.06 Re_D \quad (1)$$

其中 $V = Q/A$ 为截面平均速度。

最大可能入口段长度（ Re 达到转捩临界值 2300 时）：

$$L_{\max} = 0.06 \times 2300 D = 138 D \quad (2)$$

典型的充分发展层流入口段约为 25–40 倍直径。

3 静止平行平板间的充分发展层流

3.1 问题设定

考虑两块无限大平行平板，间距为 a ，流动沿 x 方向。假设：

1. 定常流动
2. 充分发展流动（ $\partial u / \partial x = 0$ ）
3. 无体力在 x 方向的分量（水平流动）
4. 速度分布均匀（ $v = w = 0$ ）

3.2 微分控制体方法——详细推导

取一个宽度为 dx 、高度为 dy 、深度为 dz 的微元控制体。在充分发展条件下，压力只沿 x 方向变化，速度只沿 y 方向变化。

力平衡：

作用在控制体上的表面力有四个面贡献 dF_1 、 dF_2 、 dF_3 、 dF_4 。对 x 方向的动量方程应用定常、充分发展假设，体力 $F_{B_x} = 0$ ，动量通量为零（因为 $v = 0$ 且 $\partial u / \partial x = 0$ ，没有净对流），力平衡简化为表面力平衡：

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau_{yx}}{dy} = \text{常数} \quad (3)$$

关键结论：压力梯度沿 x 方向为常数，且等于剪应力的 y 方向梯度。这是因为在充分发展层流中，压力梯度力完全由粘性力平衡。

对 y 积分一次得到剪应力分布：

$$\tau_{yx} = \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (4)$$

3.3 速度分布的推导

利用牛顿粘性定律 $\tau_{yx} = \mu(du/dy)$ ：

$$\mu \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (5)$$

再对 y 积分：

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + \frac{c_1}{\mu} y + c_2 \quad (6)$$

边界条件： $u = 0$ 在 $y = 0$ 和 $y = a$ 。

由 $u|_{y=0} = 0$ 得 $c_2 = 0$ 。由 $u|_{y=a} = 0$ 得 $c_1 = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} a$ 。

代入得抛物线速度分布：

$$u = \frac{a^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[\frac{y}{a} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \quad (7)$$

注意 $dp/dx < 0$ （压力沿流向下以克服粘性阻力），故速度为正。速度剖面为**对称抛物线**，最大速度在中线 $y = a/2$ 处。

3.4 Navier-Stokes 方程方法——交叉验证

对二维、定常、不可压缩、充分发展的层流（ $v = 0$ ， $\partial u / \partial x = 0$ ），Navier-Stokes 方程直接简化为：

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (8)$$

这个二阶常微分方程可以直接积分两次，配合边界条件得到同样的抛物线速度分布。两种方法（控制体法 vs N-S 方程法）的结果一致，验证了推导的正确性。

3.5 剪应力分布

由 $\tau_{yx} = dp/dx \cdot y + c_1$ 和 $c_1 = -\frac{1}{2}(dp/dx)a$:

$$\tau_{yx} = a \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

- 在壁面处 ($y = 0$ 和 $y = a$): $|\tau_{yx}|$ 最大
- 在中心线 ($y = a/2$): $\tau_{yx} = 0$ (对称面上剪应力为零)

3.6 体积流量、平均速度和最大速度

单位深度体积流量 (l 为 z 方向深度):

$$\begin{aligned} \frac{Q}{l} &= \int_0^a u dy = \int_0^a \frac{a^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[\frac{y}{a} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] dy \\ &= -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} a^3 \end{aligned} \quad (10)$$

用 $\Delta p = p_1 - p_2$ (L 为 x 方向长度, $dp/dx = -\Delta p/L$):

$$\frac{Q}{l} = \frac{a^3 \Delta p}{12\mu L} \quad (11)$$

平均速度:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q/l}{a} = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} a^2 \quad (12)$$

最大速度 (在 $y = a/2$ 处):

$$u_{\max} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} a^2 = \frac{3}{2} V \quad (13)$$

关键结论: 对于平行平板间的充分发展层流, 中心线速度是平均速度的 1.5 倍。

3.7 上板以恒定速度 U 运动——Couette-Poiseuille 流

当上板 ($y = a$) 以速度 U 运动, 下板静止:

边界条件变为: $u = 0$ at $y = 0$; $u = U$ at $y = a$ 。

积分得:

$$u = U \frac{y}{a} + \frac{a^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[\frac{y}{a} - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] \quad (14)$$

速度剖面 = **线性项** (纯 Couette 流, 由上板拖动产生) + **抛物线项** (Poiseuille 流, 由压力梯度驱动)。

体积流量与平均速度:

$$\frac{Q}{l} = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} a^3 \quad (15)$$

$$V = \frac{U}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} a^2 \quad (16)$$

3.8 示例 8.1——活塞泄漏流

液压系统在 20 MPa 表压下运行, 温度 55°C, 使用 SAE 10W 油。控制阀活塞直径 25 mm, 与缸体的平均径向间隙为 0.005 mm, 活塞长度 15 mm。低压侧压力为 1.0 MPa。求泄漏流量。

建模: 间隙极小 ($L/a = 15/0.005 = 3000 \gg 1$), 可近似为平行平板流动。等效板宽 $l = \pi D$ (圆柱面展开)。

$$Q = \frac{\pi D a^3 \Delta p}{12\mu L} \quad (17)$$

SAE 10W 油在 55°C 下 $\mu = 0.018 \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$, $\Delta p = 20 - 1.0 = 19 \text{ MPa}$ 。

$$Q = \frac{\pi}{12} \times \frac{25 \text{ mm} \times (0.005 \text{ mm})^3 \times 19 \times 10^6 \text{ Pa}}{0.018 \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s}) \times 15 \text{ mm}} \quad (18)$$

$$= 57.6 \text{ mm}^3/\text{s} \quad (19)$$

雷诺数检验: $V = Q/(\pi D a) = 0.147 \text{ m/s}$, $Re = \rho V a / \mu = 0.0375 \ll 2300$, 确为层流。

4 圆管中的充分发展层流——Hagen-Poiseuille 流

4.1 微分控制体方法——圆柱坐标推导

考虑半径为 R 的水平圆管。取一个环形微元控制体 (内半径 r , 外半径 $r + dr$, 长度 dx , 角跨度 $d\theta$)。

类似于平板情况, 应用定常、充分发展的动量方程:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = \text{常数} \quad (20)$$

乘以 r 并对 r 积分:

$$r\tau_{rx} = \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dx} + c_1 \quad (21)$$

在管中心 $r = 0$ 处, 由对称性 $\tau_{rx} = 0$, 故 $c_1 = 0$:

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \quad (22)$$

剪应力从中心线的零**线性增大**到壁面处的最大值。

4.2 速度分布

利用牛顿粘性定律 $\tau_{rx} = \mu(du/dr)$ (注意 $du/dr < 0$):

$$\mu \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \quad (23)$$

积分并利用边界条件 $u = 0$ at $r = R$, 以及 $r = 0$ 处速度有限 (要求 $c_1 = 0$):

$$u = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (24)$$

速度剖面为**旋转抛物面**——管道横截面上形成一族同心抛物线, 中心线速度最大。

4.3 体积流量——Hagen-Poiseuille 定律

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R u \cdot 2\pi r \, dr = \int_0^R -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r \, dr \\ &= -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad (25)$$

用 Δp 和 D 表示 ($dp/dx = -\Delta p/L$):

$$Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128\mu L} \quad (26)$$

这就是著名的 **Hagen-Poiseuille 定律**, 是圆管层流最核心的结果。

物理含义:

- $Q \propto \Delta p$ (流量与压降成正比——线性关系, 与湍流不同)
- $Q \propto D^4$ (管径的微小变化对流量影响极大——直径增加 10%, 流量增加 46%)
- $Q \propto 1/\mu$ (温度升高 $\rightarrow$ 粘度降低 $\rightarrow$ 流量增大)

平均速度与最大速度:

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (27)$$

$$u_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} = 2V \quad (28)$$

注意: 圆管中 $u_{\max} = 2V$, 而平行平板中 $u_{\max} = 1.5V$ 。这是因为圆管的三维几何约束更强。

4.4 示例 8.4——毛细管粘度计

利用 Hagen-Poiseuille 定律可以精确测量流体粘度：

$$\mu = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 L Q} \quad (29)$$

给定数据： $Q = 880 \text{ mm}^3/\text{s}$, $L = 1 \text{ m}$, $D = 0.50 \text{ mm}$, $\Delta p = 1.0 \text{ MPa}$ 。

$$\mu = \frac{\pi}{128} \times \frac{1.0 \times 10^6 \text{ Pa} \times (0.50 \times 10^{-3} \text{ m})^4}{1 \text{ m} \times 880 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}} \quad (30)$$

$$= 1.74 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 \quad (31)$$

验证层流假设： $V = 4Q/(\pi D^2) = 4.48 \text{ m/s}$, $Re = \rho V D / \mu = 999 \times 4.48 \times 0.50 \times 10^{-3} / (1.74 \times 10^{-3}) = 1290 < 2300$ ，层流。

5 流量测量

5.1 直接方法

- **累积法（容器法）**：直接测量一定时间内流入容器的流体体积
- **正位移流量计**：每个循环排出固定体积（类似活塞泵逆向使用）

5.2 节流式流量计——理论推导

在管道中安装节流件（孔板、喷嘴或文丘里管）使流动截面收缩，通过测量收缩前后的压差来计算流量。

假设：

1. 定常流动
2. 不可压缩流动
3. 沿流线
4. 无摩擦
5. 截面 1 和 2 处速度均匀
6. 截面 1 和 2 处流线无曲率（压力沿截面均匀）
7. $z_1 = z_2$

对截面 1（管道）和 2（喉部）之间的流线应用 Bernoulli 方程：

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} \quad (32)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho V_2^2}{2} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \right] \quad (33)$$

由连续性方程 $V_1 A_1 = V_2 A_2$ (不可压缩):

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (A_2/A_1)^2]}} \quad (34)$$

理论质量流量:

$$\dot{m}_{\text{theoretical}} = \rho V_2 A_2 = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \quad (35)$$

5.3 实际流量与排放系数

实际流动存在摩擦、收缩效应等因素, 引入**排放系数** C (discharge coefficient) 和直径比 $\beta = D_t/D_1$ 。由于实际喉部面积 A_2 未知 (收缩射流的截面积小于喉部几何面积), 使用喉部几何面积 A_t 并引入排放系数 C :

$$\dot{m}_{\text{actual}} = \frac{C A_t}{\sqrt{1 - \beta^4}} \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} = K A_t \sqrt{2\rho(p_1 - p_2)} \quad (36)$$

其中 $K = C/\sqrt{1 - \beta^4}$ 为**流量系数** (flow coefficient)。 C 取决于:

- 节流件类型 (孔板 $C \approx 0.6$ 、喷嘴 $C \approx 0.95$ 、文丘里管 $C \approx 0.98$)
- 雷诺数 (在高 Re 下趋于常数)

5.4 临界流动 (壅塞流) ——可压缩流体

对于可压缩流体 (如空气), 当喉部马赫数达到 1 时, 流量与下游压力无关, 称为**壅塞流** (Choked Flow):

$$\frac{p_{\text{downstream}}}{p_{\text{upstream}}} \leq \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (37)$$

对于空气 ($\gamma = 1.4$), 临界压力比 ≈ 0.528 。当下游压力 $\leq$ 上游压力的 52.8% 时, 流量达最大值, 继续降低下游压力不会增加流量。

5.5 其他流量计

- **浮子流量计 (转子流量计/Rotameter)**: 浮子在锥形管中受阻力与重力平衡; 其平衡位置对应流量
- **涡轮流量计**: 叶轮转速正比于体积流量; 精度高, 广泛用于工业计量

- **皮托管 (Pitot Tube)**: 测量总压与静压之差: $p_0 - p = \frac{1}{2}\rho V^2$; 用于点速度测量
- **激光多普勒测速 (LDA/LDV)**: 利用激光的频率偏移 (Doppler shift) 测量流体速度; 非接触、高精度
- **涡街流量计 (Vortex Flow Meter)**: 利用 Kármán 涡街的脱落频率 $f = St \cdot V/D$ (St 为 Strouhal 数) 与流速成正比; 无运动部件、可靠性高

6 小结

- 层流入口段长度 $L/D \approx 0.06 Re_D$, 最大约 $138D$
- 平行平板充分发展层流: 抛物线速度分布, $Q \propto a^3 \Delta p / (\mu L)$, $u_{\max} = 1.5V$
- **Couette-Poiseuille 流**: 速度剖面 = 线性拖动 + 抛物线压力驱动
- 圆管充分发展层流 (**Hagen-Poiseuille 定律**): $Q = \pi \Delta p D^4 / (128 \mu L)$, $u_{\max} = 2V$
- $Q \propto D^4$ ——管径的微小变化对流量有巨大影响 (解释了血管收缩和管道结垢的严重后果)
- 节流式流量计利用 Bernoulli 方程将压差转化为流量, 需经验排放系数 C 修正
- 涡街、皮托管、LDA 等是重要的流速测量技术